Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 144.

In vier Heften.

Berlin,
W. 10, Genthinerstraße 38.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1914.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 144.

Seite

Bôcher, M., On *Gibbs*'s Phenomenon . . . . . 41— 47
Bohl, P., Über Differentialungleichungen . . . . . 284—313
Bohr, H., und **Courant, R.,** Neue Anwendungen der Theorie der *Diophant*-ischen Approximationen auf die *Riemann*sche Zetafunktion . . . 249—274
Courant, R., Über die Existenztheoreme der Potential- und Funktionentheorie 190—211
— — und **Bohr, H.,** Neue Anwendungen der Theorie der *Diophant*ischen Approximationen auf die *Riemann*sche Zetafunktion . 249—274
Fejér, L., Über konjugierte trigonometrische Reihen . . . . . 48— 56
Grommer, J., Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen 114—166
Haentzschel, E., Bedingungen für die Lösung des *Fermat*schen Problems $y^2 = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4$ . . . . . 275—283
Hellinger, E., und **Toeplitz, O.,** Zur Einordnung der Kettenbruchtheorie in die Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen . . . . . 212—238
— — — — Berichtigung dazu 318
Hensel, K., Über die Grundlagen einer neuen Theorie der quadratischen Zahlkörper . . . . . 57— 70
Horn, J., *Laplace*sche Integrale als Lösungen nicht linearer Differential-gleichungen . . . . . 167—189
Perron, O., Abschätzung der Lösung der *Pell*schen Gleichung . . . . . 71— 73
Pólya, G., und **Schur, J.,** Über zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen . . . . . 89—113
Schur, J., Zwei Sätze über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln 75— 88
— — und **Pólya, G.,** Über zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen . . . . . 89—113
Steinitz, E., Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme (Fortsetzung) 1— 40
Toeplitz, O., und **Hellinger, E.,** Zur Einordnung der Kettenbruchtheorie in die Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen . . . . . 212—238
— — — — Berichtigung dazu 318
Vandiver, H. S., Extension of the criteria of *Wieferich* and *Mirimanoff* in connection with *Fermat*'s last theorem . . . . . 314—318
Vogt, W., Über monotongekrümmte Kurven . . . . . 239—248
Preisausschreiben anläßlich des VI. internationalen Mathematikerkongresses in Stockholm 74

287044

Ausgabedaten der Hefte von Band 144.

Heft 1 ausgegeben am 3. Jänuar 1914.
Heft 2 ausgegeben am 17. Februar 1914.
Heft 3 ausgegeben am 9. April 1914.
Heft 4 ausgegeben am 13. Juni 1914.

28704

Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme.

Von Herrn *E. Steinitz* in Breslau.

(Fortsetzung.)*)

V. Konvexe Strahlsysteme.

§ 17. Strahlsysteme.

Unter einem Strahlsystem verstehen wir zunächst ein System von Strahlen (Halbgeraden § 5) mit demselben Ursprung ω, der auch *Ursprung des Strahlsystems* heißen soll, sodann aber auch die Menge der auf den Strahlen eines solchen Systems gelegenen Punkte. In diesem Sinne sprechen wir von „konvexen“, „abgeschlossenen“ Strahlsystemen u. dergl. Auch ein einzelner Punkt ω soll als Strahlsystem mit dem Ursprung ω gelten.

Schreiben wir das System in der Form $\omega + \mathsf{A}$, so bezeichnet A ein Strahlsystem vom Ursprung 0; aus ihm geht $\omega + \mathsf{A}$ durch Parallelverschiebung hervor. Bei der Behandlung solcher Eigenschaften von Strahlsystemen, die, wie Konvexität und Abgeschlossenheit, durch Parallelverschiebung nicht verloren gehen, kann man daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein Strahlsystem vom Ursprung 0 der Betrachtung zugrunde legen. — Ein solches System A ist dadurch charakterisiert, daß es den Nullpunkt enthält und für jedes positive c der Bedingung $c\mathsf{A} = \mathsf{A}$ genügt. Ein Strahl aus A ist durch Angabe eines von 0 verschiedenen Punktes α — insbesondere durch seine Richtung — bestimmt, er wird deswegen manchmal kurz „Strahl α“ genannt werden.

Die Identität

*) S. Bd. 143, S. 128—175.

(1.) $((\beta\gamma)\alpha+(\gamma\alpha)\beta-(\alpha\beta)\gamma)^2=(\beta\gamma)^2\alpha^2+(\gamma\alpha)^2\beta^2+(\alpha\beta)^2\gamma^2-2(\beta\gamma)(\gamma\alpha)(\alpha\beta)$,

welche sich durch direkte Ausrechnung ergibt, zeigt, daß die durch die Gleichung

$$(2.) \qquad h(\alpha,\beta,\gamma)=((\beta\gamma)\alpha+(\gamma\alpha)\beta-(\alpha\beta)\gamma)^2$$

definierte Funktion $h(\alpha,\beta,\gamma)$ in bezug auf α,β,γ symmetrisch ist. Ist γ aus α und β komponierbar

$$\gamma=p\alpha+q\beta,$$

so folgt

$$(\beta\gamma)\alpha+(\gamma\alpha)\beta-(\alpha\beta)\gamma=(p\alpha\beta+q\beta^2)\alpha+(p\alpha^2+q\alpha\beta)\beta-(\alpha\beta)(p\alpha+q\beta)$$
$$=q\beta^2\alpha+p\alpha^2\beta,$$
$$h(\alpha,\beta,\gamma)=(q\beta^2\alpha+p\alpha^2\beta)^2=q^2\alpha^2\beta^2\beta^2+2pq\alpha^2\beta^2(\alpha\beta)+p^2\alpha^2\alpha^2\beta^2$$
$$=\alpha^2\beta^2(p\alpha+q\beta)^2,$$

also

$$h(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha^2\beta^2\gamma^2,$$

und die Symmetrie dieser Gleichung läßt erkennen, daß sie immer bestehen muß, wenn eine der Zahlen α,β,γ aus den beiden andern komponierbar ist, d. h. wenn α,β,γ linear abhängig sind. — Setzen wir jetzt α,β,γ als linear unabhängig voraus, bezeichnen wir mit M den Modul mit der Basis α,β, mit N den komplementären Modul, und zerlegen wir γ so in $\gamma_1+\gamma_2$, daß γ_1 zu M, γ_2 zu N gehört. Dann ist

$\alpha\gamma_2=0,\ \beta\gamma_2=0,\ \gamma_1\gamma_2=0,\ \gamma_2\neq 0,\ \gamma_2^2>0,\ \beta\gamma=\beta\gamma_1,\ \alpha\gamma=\alpha\gamma_1,\ \gamma^2=\gamma_1^2+\gamma_2^2$

und, weil α,β,γ_1 linear abhängig sind,

$$h(\alpha,\beta,\gamma_1)=\alpha^2\beta^2\gamma_1^2.$$

Daher wird

$$(\beta\gamma)\alpha+(\gamma\alpha)\beta-(\alpha\beta)\gamma=((\beta\gamma_1)\alpha+(\gamma_1\alpha)\beta-(\alpha\beta)\gamma_1)-(\alpha\beta)\gamma_2,$$

und wenn wir quadrieren, erhalten wir

$$h(\alpha,\beta,\gamma)=h(\alpha,\beta,\gamma_1)+(\alpha\beta)^2\gamma_2^2=\alpha^2\beta^2\gamma_1^2+(\alpha\beta)^2\gamma_2^2$$
$$=\alpha^2\beta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2\gamma_2^2+(\alpha\beta)^2\gamma_2^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2+((\alpha\beta)^2-\alpha^2\beta^2)\gamma_2^2.$$

Da $\gamma_2^2>0$, $(\alpha\beta)^2<\alpha^2\beta^2$ ist (§5), so folgt in diesem Falle $h(\alpha,\beta,\gamma)<\alpha^2\beta^2\gamma^2$. Es ergibt sich also folgendes Resultat: *Es ist*

$$(3.) \quad (\beta\gamma)^2\alpha^2+(\gamma\alpha)^2\beta^2+(\alpha\beta)^2\gamma^2-2(\beta\gamma)(\gamma\alpha)(\alpha\beta)\leqq\alpha^2\beta^2\gamma^2,$$

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn α,β,γ linear abhängig sind.

Sind α,β,γ Richtungen, und setzen wir $\sphericalangle(\beta,\gamma)=a$, $\sphericalangle(\gamma,\alpha)=b$, $\sphericalangle(\alpha,\beta)=c$, so nimmt (3.) die Form an

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c \leqq 1.$$

Hieraus folgt weiter

$$\cos^2 c \leqq 1 - \cos^2 a - \cos^2 b + 2\cos a \cos b \cos c$$
$$= \sin^2 a \sin^2 b - \cos^2 a \cos^2 b + 2\cos a \cos b \cos c$$

oder

$$(\cos a \cos b - \cos c)^2 \leqq \sin^2 a \sin^2 b$$

und, da $\sin a \geqq 0$, $\sin b \geqq 0$ ist,

$$-\sin a \sin b \leqq \cos a \cos b - \cos c \leqq \sin a \sin b.$$

Indem wir noch überall $\cos a \cos b$ abziehen und die Vorzeichen umkehren, erhalten wir

(4.) $$\cos(a-b) \geqq \cos c \geqq \cos(a+b),$$

und aus dem Vorangehenden erhellt, daß $\cos c$ dann eine der beiden Grenzen $\cos(a-b)$, $\cos(a+b)$ erreicht, wenn die drei Richtungen linear abhängig sind. Da a, b, c zwischen 0 und π liegen, so besagt $\cos(a-b) \geqq \cos c$, daß $a \leqq b + c$, $b \leqq a + c$ ist; $\cos c \geqq \cos(a+b)$ drückt aus, daß $c < a + b$, $c \leqq 2\pi - (a+b)$ ist. In Worten:

Von den Winkeln, welche drei Richtungen miteinander bilden, kann keiner größer als die Summe der beiden andern sein, und ihre Summe kann 2π nicht überschreiten. Der Fall, daß ein Winkel gleich der Summe der beiden andern ist, oder daß die Summe der drei Winkel 2π beträgt, kann nur eintreten, wenn α, β, γ linear abhängig sind; und dann tritt auch immer einer dieser Fälle ein.

Betrachten wir nun den Fall linearer Abhängigkeit genauer. — Ist $\alpha = \beta$, so wird $c = 0$, $a = b$; ist $\alpha = -\beta$, so wird $\alpha\beta = -1$, $\alpha\gamma = -\beta\gamma$, also $\cos b = -\cos a$, daher $a + b = \pi$, $c = \pi$. Sehen wir jetzt von den Fällen zweier gleicher oder entgegengesetzter Richtungen ab, so sind in der zwischen α, β, γ bestehenden Relation

(5.) $$p\alpha + q\beta + r\gamma = 0$$

die Koeffizienten von 0 verschieden und ihren Verhältnissen nach bestimmt. Durch Multiplikation von (5.) mit α bzw. γ erhält man

$$p + q\cos c + r\cos b = 0, \quad p\cos b + q\cos a + r = 0$$

und daraus durch Elimination von r

$$\frac{p}{q} = \frac{\cos a \cdot \cos b - \cos c}{\sin^2 b} = \frac{\sin a \cdot \sin b + \cos(a+b) - \cos c}{\sin^2 b} = \frac{-\sin a \sin b + \cos(a-b) - \cos c}{\sin^2 b},$$

also, da $\cos c$ gleich einer der in (4.) angegebenen Grenzen $\cos(a+b)$,

$\cos(a-b)$ sein muß, $\frac{p}{q} = \pm\frac{\sin a}{\sin b}$; und ebenso $\frac{p}{r} = \pm\frac{\sin a}{\sin c}$. Haben p, q, r gleiches Vorzeichen, so kann man der Gleichung (5.) die Form

$$\sin a \cdot \alpha + \sin b \cdot \beta + \sin c \cdot \gamma = 0$$

geben. In diesem Falle muß $\cos c = \cos(a+b)$, ebenso $\cos a = \cos(b+c)$, $\cos b = \cos(c+a)$ sein, was nur möglich ist, wenn $a+b+c = 2\pi$ ist. — Hat r ein anderes Vorzeichen wie p und q, so hat man

$$\sin c \cdot \gamma = \sin a \cdot \alpha + \sin b \cdot \beta,$$

es ist $\cos c = \cos(a+b)$, aber $\cos a = \cos(b-c)$, $\cos b = \cos(a-c)$ und daher $c = a+b$. γ ist in diesem Falle aus α und β mittels positiver Zahlen komponierbar; jeder Punkt des Strahls γ liegt deshalb zwischen Punkten der Strahlen α und β. Wir sagen daher auch, daß der Strahl γ zwischen den Strahlen α und β liegt.

Hiernach kann die Konvexität bei Strahlsystemen auch so erklärt werden: Ein Strahlsystem A heißt konvex, wenn jeder zwischen zwei Strahlen von A gelegene Strahl selbst zu A gehört.

Ist A eine beliebige Punktmenge, c eine reelle Zahl, und wird $c\mathsf{A} = \mathsf{B}$ gesetzt, so gelten, wie sofort zu sehen, die Gleichungen $c\mathsf{A}' = \mathsf{B}'$, $c\bar{\mathsf{A}} = \bar{\mathsf{B}}$. Ist nun A ein Strahlsystem vom Ursprung 0, $c > 0$, so wird $c\mathsf{A} = \mathsf{A}$, daher $c\mathsf{A}' = \mathsf{A}'$, $c\bar{\mathsf{A}} = \bar{\mathsf{A}}$, und mithin sind auch A' und $\bar{\mathsf{A}}$ Strahlsysteme mit dem Ursprung 0. Daraus folgt allgemeiner: *Ist* A *ein Strahlsystem vom Ursprung* ω, *so gilt dasselbe für* A' *und* $\bar{\mathsf{A}}$.

Ist A ein Strahlsystem vom Ursprung 0 (welches aber nicht nur aus dem Punkt 0 besteht), $\gamma \neq 0$ ein Punkt aus A', und durchläuft α die von 0 verschiedenen Zahlen aus A, so folgt aus $|\gamma|\alpha - |\alpha|\gamma = (|\gamma| - |\alpha|)\alpha + |\alpha|(\alpha-\gamma)$, daß $\|\gamma|\alpha - |\alpha|\gamma| \leqq 2|\alpha||\alpha-\gamma|$, also

$$\left|\frac{|\gamma|}{|\alpha|}\alpha - \gamma\right| \leqq 2|\alpha-\gamma|$$

ist. Da nun $|\alpha-\gamma|$ beliebig klein sein kann, so gilt dasselbe für $\left|\frac{|\gamma|}{|\alpha|}\alpha - \gamma\right|$, und da $\frac{|\gamma|}{|\alpha|}\alpha$ zu A gehört und den absoluten Wert $|\gamma|$ hat, so ergibt sich das Resultat:

Liegen in jeder Umgebung eines Punktes γ *Punkte des Strahlsystems* A, *so liegen in jeder Umgebung von* γ *auch solche Punkte von* A, *die vom Ursprung des Strahlsystems denselben Abstand haben wie* γ.

Es sei A ein Strahlsystem vom Ursprung 0, A_1 das System der Richtungen seiner Strahlen, also der Durchschnitt von A mit der Einheitskugel (= Menge aller Punkte vom absoluten Werte 1). Da diese eine abgeschlossene Punktmenge darstellt, so muß, wenn A abgeschlossen ist, auch A_1 abgeschlossen sein. Wird andererseits A_1 als abgeschlossen vorausgesetzt, und ist $\gamma \neq 0$ irgendein Punkt aus A', so gehört auch die Richtung $\frac{\gamma}{|\gamma|}$ zu A'. Nach dem zuletzt bewiesenen Satze muß es daher in jeder Umgebung von $\frac{\gamma}{|\gamma|}$ auch Punkte aus A_1 geben. $\frac{\gamma}{|\gamma|}$ gehört demnach selbst zu A_1, also auch zu A, und mithin gehört auch γ zu A. Da dies letzte auch im Falle $\gamma = 0$ gilt, so ist A abgeschlossen. *Ein Strahlsystem ist* also *dann und nur dann abgeschlossen, wenn das System seiner Richtungen abgeschlossen ist.* — Aus den für zwei Richtungen α, β geltenden Gleichungen

$$(\alpha - \beta)^2 = 2(1 - \alpha\beta) = 2(1 - \cos(\alpha, \beta)) = 4\sin^2\frac{(\alpha, \beta)}{2},$$

$$|\alpha - \beta| = 2\sin\frac{(\alpha, \beta)}{2},$$

deren letzte zeigt, daß $|\alpha - \beta|$ und $\sphericalangle(\alpha, \beta)$ einander gegenseitig eindeutig bestimmen, und daß jede dieser Größen zugleich mit der andern unendlich klein wird, folgt: *Ein System von Richtungen ist dann und nur dann abgeschlossen, wenn jede Richtung, deren Winkel mit den Richtungen des Systems die Null zur unteren Grenze haben, selbst dem System angehört.*

Es sei Γ eine beliebige Punktmenge, ω ein beliebiger Punkt. Das System $\omega + \mathsf{A}$ derjenigen von ω ausgehenden Strahlen, die wenigstens e i n e n von ω verschiedenen Punkt aus Γ enthalten (wenn keine solchen Strahlen existieren, der Punkt ω allein) kann als *das kleinste Γ enthaltende Strahlsystem vom Ursprung ω* bezeichnet werden. Nehmen wir an, daß Γ absolut beschränkt und abgeschlossen ist und daß ω dem System Γ nicht angehört, und betrachten wir, unter α eine in dem Strahlsystem A nicht vorkommende Richtung verstehend, die beiden reellen, nicht negativen und stetigen Funktionen $|\xi - \omega|$ und

$$\varphi(\xi) = \big|(\xi - \omega) - |\xi - \omega|\,\alpha\big|.$$

Lassen wir die Variable ξ nur die Zahlenmenge Γ durchlaufen, so sind nach einem bekannten Satze beide Funktionen beschränkt und erreichen ihre obere und untere Grenze. Es sei g_1 die obere Grenze von $|\xi - \omega|$, g_2 die untere von $\varphi(\xi)$. g_1 ist positiv, ebenso aber g_2. Denn $\frac{\xi - \omega}{|\xi - \omega|}$ stellt die

Richtung des durch ξ gehenden Strahles aus $\omega + \mathsf{A}$ dar, ist also von α verschieden, und mithin kann $\varphi(\xi)$ nicht 0 werden. Jetzt folgt, daß

$$\left| \frac{\xi - \omega}{|\xi - \omega|} - \alpha \right|$$

den positiven Wert $\frac{g_2}{g_1}$ nicht unterschreitet, also der Winkel zwischen α und den Richtungen der Strahlen von $\omega + \mathsf{A}$ oberhalb einer positiven Grenze bleibt. Das Strahlsystem $\omega + \mathsf{A}$ ist also abgeschlossen, und wir erhalten den Satz:

Ist Γ *eine absolut beschränkte und abgeschlossene Punktmenge,* ω *ein nicht zu* Γ *gehöriger Punkt, so ist das kleinste* Γ *enthaltende Strahlsystem vom Ursprung* ω *abgeschlossen.*

§ 18. Strahlsysteme verschiedener Stufen.

Es kann der Fall eintreten, daß eine und dieselbe Punktmenge sich auf mehrfache Weise als ein Strahlsystem auffassen läßt. So ist z. B. jede lineare Mannigfaltigkeit Λ ein Strahlsystem, als dessen Ursprung jeder Punkt von Λ angesehen werden kann. — Ist B ein Strahlsystem, als dessen Ursprung jeder der beiden Punkte ω_1, ω_2 gelten kann, und setzt man

$$\mathsf{B} = \omega_1 + \mathsf{A}_1 = \omega_2 + \mathsf{A}_2,$$

so gilt für $a > 0$

$$(\omega_1 - \omega_2) + \mathsf{A}_1 = \mathsf{A}_2 = a\mathsf{A}_2 = a[(\omega_1 - \omega_2) + \mathsf{A}_1] = a(\omega_1 - \omega_2) + a\mathsf{A}_1 = a(\omega_1 - \omega_2) + \mathsf{A}_1,$$

also, wenn b ebenfalls > 0 ist,

$$a(\omega_1 - \omega_2) + \mathsf{A}_1 = b(\omega_1 - \omega_2) + \mathsf{A}_1$$

oder, wenn $a - b = c$, $(1 - c)\omega_1 + c\omega_2 = \omega_3$ gesetzt wird,

$$(6.) \qquad \mathsf{B} = \omega_1 + \mathsf{A}_1 = \omega_1 - c(\omega_1 - \omega_2) + \mathsf{A}_1 = \omega_3 + \mathsf{A}_1.$$

Somit kann auch ω_3 als Ursprung von B gelten; und da c jede reelle Zahl, ω_3 jeden Punkt der Verbindungsgeraden von ω_1 und ω_2 repräsentieren kann, so folgt: *Diejenigen Punkte, welche als Ursprung eines Strahlsystems* B *gelten können, bilden eine lineare Mannigfaltigkeit* Λ.

Wir nennen Λ den *totalen Ursprung* von B, während wir als „*Ursprung*“ schlechthin jeden Punkt aus Λ, ebenso jede in Λ enthaltene lineare Mannigfaltigkeit bezeichnen. Unter der *Stufe* eines Strahlsystems verstehen wir die Dimension seines totalen Ursprungs. Die gewöhnlichen Strahlsysteme sind also von der 0-ten Stufe.

Aus (6.) folgt, wenn wir $c = 1$ setzen,

$$\omega_2 + \mathsf{A}_1 = \omega_1 + \mathsf{A}_1 = \mathsf{B} = \omega_2 + \mathsf{A}_2, \quad \mathsf{A}_1 = \mathsf{A}_2, \quad \mathsf{B} = (\omega_2 - \omega_1) + \mathsf{B}.$$

Dies zeigt, daß ein Strahlsystem B bei jeder Parallelverschiebung, die einen Ursprungspunkt an die Stelle eines andern versetzt, in sich übergeht und daß das System der Richtungen der Strahlen von B unabhängig davon ist, auf welchen Ursprungspunkt man sich bezieht.

Wir können die Strahlsysteme höherer Stufe noch etwas anders auffassen. — Eine lineare Mannigfaltigkeit Λ von $r < n$ Dimensionen, die als Verbindung von $r+1$ Punkten $\alpha_1, \dots \alpha_{r+1}$ erhalten wird, und ein Punkt α_0 außerhalb Λ bestimmen eine lineare Mannigfaltigkeit A von $r+1$ Dimensionen. In der Form

$$c_0\,\alpha_0 + c_1\,\alpha_1 + \cdots + c_{r+1}\,\alpha_{r+1}$$

mit der Bedingung $c_0 + c_1 + \cdots + c_{r+1} = 1$ werden die Punkte von A, jeder einmal, dargestellt. Den drei Möglichkeiten $c_0 > 0$, $c_0 = 0$, $c_0 < 0$ entsprechend, zerfällt A in drei Systeme A_+, Λ, A_-. Diese Einteilung ist nur von Λ nicht aber von der speziellen Wahl der Punkte α abhängig, da jede Strecke, die einen Punkt aus A_+ mit einem aus A_- verbindet, einen Punkt aus Λ enthält, während die Systeme A_+ und A_- konvex sind. Das A_+ und Λ umfassende System A'_+ (ebenso A'_-) bezeichnen wir als (lineare) $(r+1)$-dimensionale Halbmannigfaltigkeit vom Ursprung Λ. Sie ist durch Λ und einen nicht auf Λ gelegenen Punkt (etwa α_0) bestimmt. Wie man sogleich sieht, ist A'_+ ein Strahlsystem vom (totalen) Ursprung Λ, und zwar das kleinste derartige α_0 enthaltende System. Jedes Strahlsystem vom Ursprung Λ kann demnach auch als ein System von $(r+1)$-dimensionalen Halbmannigfaltigkeiten dieses Ursprungs angesehen werden.

Es seien M_1, M_2 zwei komplementäre Moduln (§ 3), und es möge, wenn ξ eine beliebige komplexe Zahl ist, $\xi = \xi_1 + \xi_2$ die Zerlegung von ξ in die beiden zu M_1 bezw. M_2 gehörigen „Komponenten“ darstellen. Durchläuft dann η_1 den Modul M_1, so folgt aus $\xi_2\,\eta_1 = 0$, $\xi_2\,\xi_1 = 0$:

$$(\xi - \eta_1)^2 = (\xi_2 + (\xi_1 - \eta_1))^2 = \xi_2^2 + (\xi_1 - \eta_1)^2,$$

und hieraus weiter, daß $|\xi - \eta_1|$ für $\eta_1 = \xi_1$ ein Minimum wird, daß also ξ_1 die Projektion von ξ auf M_1, ebenso ξ_2 die Projektion von ξ auf M_2 ist (§ 5). — Hat man eine Gleichung $\gamma = p\alpha + q\beta$, so folgt, da $p\alpha_1 + q\beta_1$ zu M_1, $p\alpha_2 + q\beta_2$ zu M_2 gehört und die Summe beider Zahlen $= \gamma$ ist,

$$\gamma_1 = p\alpha_1 + q\beta_1, \qquad \gamma_2 = p\alpha_2 + q\beta_2.$$

Dies zeigt unter anderem, daß die Projektion einer Geraden eine Gerade

oder ein Punkt, mithin die Projektion einer linearen Mannigfaltigkeit eine lineare Mannigfaltigkeit ist. Ferner sieht man, daß die Projektion einer Strecke eine Strecke höchstens gleicher Länge oder ein Punkt wird, und daß daher jede konvexe Punktmenge sich wieder als konvexe Punktmenge projiziert. — Jeder in M_1 enthaltenen Punktmenge Γ_1 können wir eine (Γ_1 enthaltende) Punktmenge zuordnen, die aus allen Punkten besteht, deren Projektion auf M_1 der Menge Γ_1 angehört. Wir wollen die Γ_1 in dieser Weise zugeordnete Menge mit $\Gamma_1 + \mathsf{M}_2$ bezeichnen, weil sie aus allen Punkten von der Form $\gamma_1 + \mu_2$ besteht, wo γ_1 Element von Γ_1, μ_2 Element von M_2 ist. Sind α_1, β_1 zwei verschiedene Punkte aus M_1, so haben $\alpha_1 + \mathsf{M}_2$ und $\beta_1 + \mathsf{M}_2$ keinen gemeinsamen Punkt. Ist $\xi = \xi_1 + \xi_2$ ein beliebiger Punkt, $\eta = \alpha_1 + \eta_2$ ein variabler Punkt aus $\alpha_1 + \mathsf{M}_2$, so folgt, da $(\xi - \eta)^2 = (\xi_1 - \alpha_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2$ für $\eta_2 = \xi_2$ sein Minimum $(\xi_1 - \alpha_1)^2$ annimmt, daß $|\xi_1 - \alpha_1|$ den Abstand des Punktes ξ von $\alpha_1 + \mathsf{M}_2$ darstellt. Liegen also in jeder Umgebung von ξ_1 Punkte aus Γ_1, so liegen in jeder Umgebung von ξ Punkte aus $\Gamma_1 + \mathsf{M}_2$, und umgekehrt. Da ferner ξ_1 dann und nur dann zu Γ_1 gehört, wenn ξ zu $\Gamma_1 + \mathsf{M}_2$ gehört, so sind die Punktmengen Γ_1 und $\Gamma_1 + \mathsf{M}_2$ entweder beide abgeschlossen oder beide nicht abgeschlossen. Ist $\Gamma_1 + \mathsf{M}_2$ konvex, so muß auch Γ_1 als Projektion von $\Gamma_1 + \mathsf{M}_2$ konvex sein. Auch hier gilt, wie sofort zu sehen, die Umkehrung. — Ist Γ_1 ein in M_1 gelegener Strahl mit dem Ursprung ω_1, so ist $\Gamma_1 + \mathsf{M}_2$ eine Halbmannigfaltigkeit mit dem (totalen) Ursprung $\omega_1 + \mathsf{M}_2$, und umgekehrt. — Ist Γ eine zunächst beliebige Punktmenge, Γ_1 die Projektion von Γ auf M_1, ξ_1 ein Punkt von M_1, und liegen in jeder Umgebung von ξ_1 Punkte aus Γ_1, so gibt es in Γ Punkte, deren Abstand von $\xi_1 + \mathsf{M}_2$ unter jeder vorgeschriebenen Größe liegt. Wird nun Γ als abgeschlossen und absolut beschränkt vorausgesetzt, so muß nach einem bekannten Satze auch wenigstens ein Punkt aus Γ in $\xi_1 + \mathsf{M}_2$ liegen, mithin ξ_1 zu Γ_1 gehören. Also ist auch Γ_1 abgeschlossen. D. h. *die Projektion einer abgeschlossenen und absolut beschränkten Punktmenge ist abgeschlossen* (und natürlich auch absolut beschränkt). — Behalten wir die Voraussetzungen bei, und verstehen wir unter ω_1 einen nicht zu Γ_1 gehörigen Punkt aus M_1, also unter $\omega_1 + \mathsf{M}_2$ irgendeine zu M_2 parallele Mannigfaltigkeit, die keinen Punkt von Γ enthält, und bezeichnen wir mit $\omega_1 + \mathsf{A}_1$ das kleinste Γ_1 enthaltende Strahlsystem vom Ursprung ω_1, so ist nach dem letzten Satze in § 17 $\omega_1 + \mathsf{A}_1$ abgeschlossen. Somit ist auch

$\omega_1 + \mathsf{A}_1 + \mathsf{M}_2$ abgeschlossen. Nun besteht aber $\omega_1 + \mathsf{A}_1 + \mathsf{M}_2$ aus allen den Halbmannigfaltigkeiten vom Ursprung $\omega_1 + \mathsf{M}_2$, die Punkte aus Γ enthalten, ist also das kleinste Γ enthaltende Strahlsystem dieses Ursprungs. Somit ergibt sich der allgemeinere Satz: *Ist Γ eine abgeschlossene und absolut beschränkte Punktmenge, $\Lambda\,(=\omega_1+\mathsf{M}_2)$ eine lineare Mannigfaltigkeit, die keinen Punkt aus Γ enthält, so ist auch das kleinste Γ enthaltende Strahlsystem vom Ursprung Λ abgeschlossen.*

§ 19. Konvexe Strahlsysteme.

1. *Ist Γ eine beliebige Punktmenge, g eine beliebige reelle Zahl, so ist die Menge A aller Punkte α, für welche g eine obere Schranke von $\alpha\Gamma$ ist, konvex und abgeschlossen.*

Durch eine Ungleichung von der Form $\gamma\xi \leqq g$ wird nämlich ein Halbraum definiert, und A ist offenbar der Durchschnitt aller der Halbräume, die den verschiedenen Zahlen γ aus Γ entsprechen.

2. *Ist Γ eine beliebige Punktmenge, so ist das System A aller Punkte α, für welche $\alpha\Gamma$ nach oben beschränkt ist, ein konvexes Strahlsystem mit dem Ursprung* 0.

Ein konvexes Strahlsystem vom Ursprung 0 läßt sich nämlich offenbar charakterisieren als eine Punktmenge M von der Beschaffenheit, daß, wenn μ_1, μ_2 zwei (gleiche oder verschiedene) Elemente aus M und c_1, c_2 nicht negative Zahlen sind, allemal auch $c_1\mu_1 + c_2\mu_2$ zu M gehört. Sind nun α_1, α_2 Elemente des in unserem Satze erwähnten Systems A, und bezeichnet g eine obere Schranke von $\alpha_1\Gamma$ und $\alpha_2\Gamma$, so ist $(c_1+c_2)g$ eine obere Schranke von $(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2)\Gamma$, woraus das Behauptete folgt. — Ist α Element von A und g obere Grenze von $\alpha\Gamma$, so ist Γ in dem durch die Ungleichung $\alpha\xi \leqq g$ definierten Halbraum enthalten, und da dieser konvex und abgeschlossen ist, so enthält er auch $\bar{\Gamma}'$. g ist daher zugleich obere Grenze von $\alpha\bar{\Gamma}'$. — Ist ferner $c > 0$, so ist cg die obere Grenze von $\alpha(c\bar{\Gamma})$. Wird nun Γ selbst als Strahlsystem vom Ursprung 0 vorausgesetzt, so ist $c\Gamma = \Gamma$, also $cg = g, g = 0$. $\xi\Gamma$ ist also entweder nach oben unbeschränkt oder hat die obere Grenze 0. Daraus folgt nach dem ersten Satze dieses Paragraphen, daß das System A der Punkte α, für welche $\alpha\Gamma$ nach oben beschränkt ist, abgeschlossen sein muß. Somit ist der erste Teil des folgenden Satzes bewiesen:

3. *Ist* Γ *ein Strahlsystem vom Ursprung* 0, *so ist das System* A *aller Punkte* α, *für welche* $\alpha\Gamma$ *nach oben beschränkt ist, ein abgeschlossenes konvexes Strahlsystem mit dem Ursprung* 0. *Ist* Γ *auch abgeschlossen und konvex, so besteht umgekehrt* Γ *aus allen Punkten* γ, *für welche* $\gamma\mathsf{A}$ *nach oben beschränkt ist.*

Um den zweiten Teil zu beweisen, beachten wir, daß für irgend zwei Punkte α, γ aus A und Γ $\alpha\gamma \leqq 0$ sein muß, da 0 die obere Grenze von $\alpha\Gamma$ ist. Hieraus folgt aber, daß für jedes γ aus Γ $\gamma\mathsf{A}$ nach oben beschränkt ist. Ist andererseits γ_1 irgendeine Zahl, für welche $\gamma_1\mathsf{A}$ nach oben beschränkt ist, also (da A Strahlsystem vom Ursprung 0 ist) die 0 zur oberen Grenze hat, und stellt die Ungleichung $\delta\xi \leqq c$ irgendeinen Γ enthaltenden Halbraum dar, so ist $c \geqq 0$, $\delta\Gamma$ nach oben beschränkt, daher δ Element aus A, $\gamma_1\delta \leqq 0 \leqq c$, also auch γ_1 Punkt dieses Halbraums. Mithin gehört γ_1 (§ 11,3.) dem System $\bar{\Gamma}' = \Gamma$ an. — Wir nennen A und Γ *komplementäre Strahlsysteme* (eine Bezeichnung, die wir nur bei abgeschlossenen konvexen Strahlsystemen mit dem Ursprung 0 gebrauchen). Von zwei komplementären Strahlsystemen enthält, dem Vorangehenden zufolge, jedes die Zahlen, die mit jeder Zahl des anderen multipliziert einen nicht positiven Wert ergeben. Oder geometrisch ausgedrückt: jedes enthält alle die Strahlen (vom Ursprung 0), die mit jedem Strahl des anderen einen rechten oder stumpfen Winkel bilden. — Die früher (§ 3) eingeführten komplementären Moduln sind auch komplementäre Strahlsysteme.

Der beim Beweise von 3. bemerkte Umstand, daß, wenn das Strahlsystem Γ vom Ursprung 0 in Richtung α beschränkt ist, die obere Grenze von $\alpha\Gamma$ 0 sein muß, zeigt, daß $\alpha\xi = 0$ die Gleichung der Stützebene in dieser Richtung ist, also jede Stützebene durch den Ursprung 0 von Γ hindurchgeht. Daraus ergibt sich allgemein:

4. *Jede Stützebene eines Strahlsystems geht durch seinen (totalen) Ursprung.*

Wir zeigen jetzt:

5. *Ist in einem konvexen Strahlsystem* A *eine lineare Mannigfaltigkeit* M *enthalten, die durch einen Ursprungspunkt* ω *von* A *hindurchgeht, so ist die ganze Mannigfaltigkeit* M *Ursprung von* A.

Beim Beweise können wir unbeschadet der Allgemeinheit $\omega = 0$ annehmen, so daß M ein Modul, A ein konvexes Strahlsystem vom Ursprung

0 ist. Nach der oben (S. 9, Z. 18) gegebenen Charakterisierung eines solchen Strahlsystems müssen, wenn μ, also auch $-\mu$ zu M, α zu A gehört, auch die Punkte $\mu + \alpha$ und $-\mu + \alpha$ in A enthalten sein. Hiernach sind die Punktmengen $\mu + A$ und $-\mu + A$ in A enthalten, und da $-\mu + A$ Teil von A ist, so ist $A = \mu + (-\mu + A)$ Teil von $\mu + A$. Daraus folgt $\mu + A = A$, und diese Gleichung zeigt, daß μ, d. h. jeder Punkt von M, als Ursprung von A anzusehen ist.

Es sei B das kleinste Strahlsystem vom Ursprung 0, welches eine gegebene Punktmenge A enthält. Sind β_1, β_2 zwei Punkte aus B, p_1, p_2 zwei beliebige positive Zahlen, so kann man $\beta_1 = c_1 \alpha_1$, $\beta_2 = c_2 \alpha_2$ setzen, wo $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ und α_1, α_2 Punkte aus A sind. Ist A konvex, so ist auch $\frac{p_1 c_1 \alpha_1 + p_2 c_2 \alpha_2}{p_1 c_1 + p_2 c_2}$ in A, mithin $p_1 c_1 \alpha_1 + p_2 c_2 \alpha_2 = p_1 \beta_1 + p_2 \beta_2$ in B enthalten. Dies zeigt, daß in diesem Falle auch B konvex ist. Also:

6. *Ist* A *eine konvexe Punktmenge, so ist das kleinste* A *enthaltende Strahlsystem* B *vom Ursprung* ω *ebenfalls konvex.*

Zusatz: Ist statt eines Punktes ω eine lineare Mannigfaltigkeit $\omega + M$ (M ein Modul) gegeben, so ergibt sich dasselbe Resultat. Denn wenn man in diesem Fall unter B das kleinste A enthaltende Strahlsystem vom Ursprung $\omega + M$ versteht und mit A_1, B_1, ω_1 die Projektionen von A, B, ω auf den zu M komplementären Modul N bezeichnet, so ist (§ 18) A_1 konvex, B_1 das kleinste A_1 enthaltende Strahlsystem vom Ursprung ω_1, also nach 6. konvex, und daher ist auch B konvex (§ 18).

Es seien A, B und M, N zwei Paare komplementärer Strahlsysteme (also 0 Ursprungspunkt). Ist M in A enthalten, so ergibt sich aus der Erklärung der komplementären Systeme sofort, daß B in N enthalten sein muß. Ist, wie wir jetzt voraussetzen wollen, M der totale Ursprung von A, also ein Modul, und zwar nach Satz 5. der größte in A enthaltene Modul, so ist N der kleinste B enthaltende Modul und, da B den Nullpunkt enthält, überhaupt die kleinste B enthaltende lineare Mannigfaltigkeit. Wird mit s die Stufe von A, mit r die Dimension von B bezeichnet, so stellen s und r zugleich die Dimensionen der Moduln M und N dar, und da diese komplementär sind, so ist $r + s = n$. — Wenn A nicht den ganzen Raum umfaßt, ist $s < n$, $r > 0$, und wir können aus B r linear unabhängige Zahlen $\beta_1, \ldots \beta_r$ herausgreifen. Diese stellen dann eine Basis des Moduls N dar, und die Gleichungen

$$\beta_i \xi = 0 \qquad (i=1, \ldots r)$$

haben also nur die Zahlen des Moduls M zu gemeinsamen Lösungen. Da ferner für jedes Element α aus A

$$\beta_i \alpha \leqq 0 \qquad (i=1, \ldots r)$$

ist, so ist

$$(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r)\alpha \leqq 0$$

und nur dann gleich 0, wenn α dem Modul M angehört. Die durch die Gleichung

$$(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r)\xi = 0$$

definierte Ebene ist daher Stützebene von A und hat mit A nur die Punkte von M gemein. — Wir formulieren diese Resultate in den beiden folgenden Sätzen:

7. *Sind* A *und* B *komplementäre Strahlsysteme, und bezeichnet* s *die Stufe von* A, r *die Dimension von* B, *so ist* $r + s = n$.

8. *Ein konvexes, abgeschlossenes, nicht den ganzen Raum umfassendes Strahlsytem* A *besitzt Stützebenen, die mit* A *nur die Punkte des totalen Ursprungs gemein haben.*

Wir wollen solche Stützebenen als „äußere Stützebenen" bezeichnen. (Diese Bezeichnung wird nur bei konvexen abgeschlossenen Strahlsystemen gebraucht werden).

Ein konvexes Strahlsystem mit dem Ursprung 0 enthält jeden Punkt, der sich aus zwei oder allgemeiner aus endlichvielen seiner Punkte mittels nicht negativer Koeffizienten komponieren läßt. Ist nun A eine beliebige Punktmenge und B das System aller Punkte, die sich aus je endlichvielen Punkten von A mit nicht negativen Zahlen komponieren lassen, so muß ein konvexes A enthaltendes Strahlsystem vom Ursprung 0 auch B enthalten. Andererseits besitzt B selbst die charakteristischen Eigenschaften eines solchen Systems. Dies besagt:

9. *Ist* A *eine beliebige Punktmenge, so besteht das kleinste konvexe* A *enthaltende Strahlsystem vom Ursprung* 0 *aus den Punkten, die aus je endlichvielen Punkten von* A *mit nicht negativen Koeffizienten komponierbar sind.*

Zufolge § 10,1. braucht man zur Darstellung jedes einzelnen Punktes dieses Systems nicht mehr als n Punkte aus A zu verwenden.

§ 20. Allseitige Strahlsysteme.

Legt man durch den Ursprung ω eines Strahlsystems A eine beliebige Ebene Λ, so wird, falls A total unbeschränkt ist, stets auf jeder Seite von

Λ wenigstens ein Strahl aus A liegen. Ist hingegen A nicht total unbeschränkt, so kann man Λ als Stützebene wählen; dann ist die eine Seite von Λ von Strahlen frei. Aus diesem Grunde bezeichnen wir die total unbeschränkten Strahlsysteme auch als *allseitige* Strahlsysteme*). Ein Strahlsystem, das ein allseitiges Teilsystem enthält, ist natürlich selbst allseitig. Wenn ein allseitiges Strahlsystem A kein kleineres allseitiges System als Teil enthält, wenn also durch die Weglassung eines einzigen, wie auch immer gewählten Strahles aus A die Allseitigkeit aufgehoben wird, so nennen wir A irreduzibel**).

Wir beweisen:

1. *Damit ein Strahlsystem* A *vom Ursprung* 0 *allseitig sei, ist notwendig und hinreichend, daß man ihm eine endliche Anzahl von Strahlen*

(7.) $$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$$

entnehmen kann, unter denen sich n linear unabhängige befinden und zwischen denen eine lineare Relation mit lauter positiven Koeffizienten besteht. Die Anzahl m kann dabei $\leqq 2n$ *angenommen werden.*

Wir zeigen zunächst, daß die angegebenen Bedingungen hinreichend sind. Zu diesem Zweck bezeichnen wir mit B das angenommene System der Strahlen (7.). $\bar{\mathsf{B}}$ ist dann ein konvexes Strahlsystem vom Ursprung 0, das die Zahlen (7.) und daher auch alle aus ihnen mittels positiver Koeffizienten komponierbaren Zahlen enthält. Ist nun γ eine beliebige Zahl, so hat man, da unter den Zahlen (7.) n linear unabhängige vorkommen, zunächst eine Gleichung

(8.) $$\gamma = c_1\alpha_1 + \cdots + c_m\alpha_m,$$

in der auch negative Koeffizienten vorkommen können. Da aber nach unserer Voraussetzung eine Gleichung

$$0 = a_1\alpha_1 + \cdots + a_m\alpha_m$$

mit lauter positiven Koeffizienten besteht, so erhalten wir, wenn wir diese Gleichung mit einer hinreichend großen positiven Zahl multipliziert zu (8.) addieren, eine neue Darstellung von γ mit lauter positiven Koeffizienten. γ ist also in $\bar{\mathsf{B}}$ enthalten, und $\bar{\mathsf{B}}$ umfaßt den ganzen Raum. Daraus folgt,

*) Vgl. meine in der Einleitung zitierte Arbeit, Arch. f. Math. u. Phys., III. Reihe. 14. S. 7.

**) A. a. O., S. 9.

daß B total unbeschränkt (§ 11), also allseitig ist. Daher ist auch das B enthaltende Strahlsystem A allseitig.

Setzen wir andererseits A als allseitiges Strahlsystem voraus, so umfaßt $\overline{\mathsf{A}}$ alle Punkte. Da nicht alle Strahlen von A in einer Ebene liegen, so kann man unter ihnen n linear unabhängige

$$\alpha_1, \dots \alpha_n$$

finden. Bildet man mittels positiver Koeffizienten a eine Zahl

$$(9.) \qquad \delta = a_1 \alpha_1 + \cdots + a_n \alpha_n,$$

so ist $\delta \neq 0, -\delta$, wie jede Zahl, in $\overline{\mathsf{A}}$ enthalten und daher nach § 10, 4. aus nicht mehr als $n+1$, nach § 10, 1. sogar aus $r \leqq n$ Zahlen

$$\alpha_{n+1}, \dots \alpha_{n+r}$$

des Systems A, die natürlich $\neq 0$ angenommen werden können, mittels positiver Koeffizienten komponierbar. Man hat also eine Gleichung

$$(10.) \quad -\delta = a_{n+1} \alpha_{n+1} + \cdots + a_{n+r} \alpha_{n+r} \qquad (a_{n+1} > 0, \dots a_{n+r} > 0),$$

und erhält aus (9.) und (10.) die zu beweisende Relation

$$a_1 \alpha_1 + \cdots + a_{n+r} \alpha_{n+r} = 0 \qquad (a_1 > 0, \dots a_{n+r} > 0)$$

zwischen den Strahlen $\alpha_1, \dots \alpha_{n+r}$. Da hierbei $n + r \leqq 2n$ ist, so ist auch gezeigt, daß die in unserem Satze mit m bezeichnete Zahl $\leqq 2n$ angenommen werden kann. Damit ist Satz 1. bewiesen. — Da die Strahlen $\alpha_1, \dots \alpha_{n+r}$ nach diesem Satze selbst schon ein allseitiges System bilden, in jedem allseitigen System also ein solches von nicht mehr als $2n$ Strahlen enthalten ist, so kann ein irreduzibles allseitiges System aus höchstens $2n$ Strahlen bestehen. Daß es mindestens $n+1$ Strahlen enthalten muß, folgt daraus, daß aus n Zahlen, wenn keine negativen Koeffizienten zugelassen werden, nicht alle Zahlen komponierbar sind, also n Strahlen kein allseitiges System bilden können. Ein allseitiges System von $n+1$ Strahlen ist daher notwendig irreduzibel. Man sieht auch sofort, wie man ein solches System konstruieren kann: Man wähle $\alpha_1, \dots \alpha_n$ linear unabhängig und $n+1$ beliebige positive Zahlen $a_0, a_1, \dots a_n$, bestimme sodann α_0 aus der Gleichung

$$a_0 \alpha_0 + a_1 \alpha_1 + \cdots + a_n \alpha_n = 0;$$

dann ist das System der $n+1$ Strahlen $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n$ allseitig. — Ein irreduzibles allseitiges Strahlsystem von $2n$ Elementen wird von n Gegenstrahlenpaaren

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots \alpha_n,$$
$$\beta_1 = -\alpha_1, \beta_2 = -\alpha_2, \dots \beta_n = -\alpha_n$$

gebildet, vorausgesetzt, daß sie nicht alle in einer Ebene liegen. Denn unter dieser Voraussetzung sind $\alpha_1, \dots \alpha_n$ linear unabhängig und, da

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \beta_1 + \dots + \beta_n = 0$$

ist, ist das System nach Satz 1. allseitig. Läßt man aber einen Strahl fort, so liegt sein Gegenstrahl auf der einen Seite der Ebene Λ, die man durch die übrigen Strahlen legen kann, während auf der anderen Seite von Λ jetzt kein Strahl mehr gelegen ist. Das System der $2n$ Strahlen ist also irreduzibel.

Wir fassen diese Ergebnisse noch einmal in dem Satze zusammen:

2. *In jedem allseitigen Strahlsystem (auch in jedem, das unendlich viele Strahlen enthält) ist wenigstens ein irreduzibles enthalten. Ein solches besteht aus wenigstens $n+1$ und höchstens $2n$ Strahlen; und es gibt irreduzible allseitige Strahlsysteme aus $n+1$ und solche aus $2n$ Strahlen.*

Wir fügen noch den folgenden Satz hinzu:

3. *Wenn ein allseitiges Strahlsystem Γ kein (irreduzibles) allseitiges Strahlsystem von weniger als $2n$ Elementen enthält, so besteht es aus n Paaren von Gegenstrahlen.*

Beweis: Es erfülle das Strahlsystem Γ die Voraussetzungen des Satzes 3. und habe den Nullpunkt zum Ursprung. Nach Satz 2. ist dann in Γ ein irreduzibles allseitiges aus $2n$ Strahlen bestehendes Strahlsystem A enthalten. Wir bezeichnen mit $\alpha_1, \dots \alpha_n$ n linear unabhängige Strahlen aus A, die übrigen mit $\alpha_{n+1}, \dots \alpha_{2n}$ und setzen $-\alpha_{n+k} = \beta_k$ $(k = 1, \dots n)$. Wir bezeichnen ferner mit A_1 bzw. B_1 die Menge aller Punkte

$$c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n \quad \text{bzw.} \quad c_1\beta_1 + \dots + c_n\beta_n$$

mit positiven (nicht verschwindenden) Koeffizienten c. Die Punktmengen A_1 und B_1 sind konvex, und A_1 ist n-dimensional. Es sei jetzt

(11.) $$\gamma = c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n$$

ein beliebiger Punkt aus A_1. γ ist $\neq 0$ und, da A allseitig ist, so läßt sich $-\gamma$ aus n oder weniger als n von den Zahlen $\alpha_1, \dots \alpha_{2n}$ mittels positiver Koeffizienten komponieren. Wir haben also eine Gleichung

(12.) $$-\gamma = c_{n+1}\gamma_1 + \dots + c_{n+r}\gamma_r \qquad (c_{n+1} > 0, \dots c_{n+r} > 0),$$

wobei die Zahlen $\gamma_1, \dots \gamma_r$ unter den Zahlen $\alpha_1, \dots \alpha_{2n}$ vorkommen und $r \leqq n$ ist. Aus (11.), (12.) folgt

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n + c_{n+1}\gamma_1 + \cdots + c_{n+r}\gamma_r = 0$$

und hieraus nach Satz 1., daß die Strahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_n, \gamma_1, \ldots \gamma_r$ ein allseitiges System bilden. Da dieses aber Teil des irreduziblen Systems A ist, so muß es mit A identisch sein. Wir erhalten also $r = n$ und dürfen, da über die Reihenfolge der Elemente noch nicht verfügt wurde,

$$\gamma_1 = \alpha_{n+1} = -\beta_1, \ldots \gamma_n = \alpha_{2n} = -\beta_n$$

annehmen. Gleichung (12.) geht jetzt über in

$$\gamma = c_{n+1}\beta_1 + \cdots + c_{2n}\beta_n,$$

und dies zeigt, daß γ der Punktmenge B_1 angehört. Somit ist A_1 Teil von B_1, daher auch B_1 n-dimensional, und wir können jetzt in genau derselben Weise zeigen, daß B_1 in A_1 enthalten, also $\mathsf{A}_1 = \mathsf{B}_1$ ist.

Jede beliebige Zahl γ läßt sich in der Form

$$\gamma = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n,$$

ebenso in der Form

$$\gamma = b_1\beta_1 + \cdots + b_n\beta_n$$

darstellen, wenn die Koeffizienten keiner Beschränkung unterworfen werden. Beide Darstellungen sind eindeutig bestimmt. Wenn in der einen die Koeffizienten sämtlich positiv ausfallen, so gehört γ zu $\mathsf{A}_1 = \mathsf{B}_1$, und die Koeffizienten in der andern Darstellung sind ebenfalls sämtlich positiv. — Es sei jetzt

$$\gamma' = a_1'\alpha_1 + \cdots + a_n'\alpha_n = b_1'\beta_1 + \cdots + b_n'\beta_n$$

eine beliebige Zahl aus $\mathsf{A}_1 = \mathsf{B}_1$, also $a_i' > 0$, $b_i' > 0$ $(i = 1, \ldots n)$,

$$\gamma = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n = b_1\beta_1 + \cdots + b_n\beta_n$$

eine ganz beliebige Zahl. Dann ergibt sich für jedes x

$$\gamma' + x\gamma = (a_1' + xa_1)\alpha_1 + \cdots + (a_n' + xa_n)\alpha_n = (b_1' + xb_1)\beta_1 + \cdots + (b_n' + xb_n)\beta_n.$$

Ist ein Koeffizient b_i negativ, so wird für großes positives x auch $b_i' + xb_i < 0$, und es können also nicht alle Koeffizienten $a_k' + xa_k$ positiv sein. Aus $a_k' + xa_k \leqq 0$ folgt aber $a_k < 0$; d. h. es muß auch ein negativer Koeffizient a_k vorkommen. Betrachten wir jetzt eine Zahl

(13.) $$\gamma_1 = a_1\alpha_1 + \cdots + a_k\alpha_k = b_1\beta_1 + \cdots + b_n\beta_n,$$

wo $a_1 > 0, \ldots a_k > 0, a_{k+1} = 0, \ldots a_n = 0$, so kann kein Koeffizient b negativ ausfallen. Das gilt auch, wenn wir die Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ selbst in der Form

(14.) $$\alpha_i = c_{i1}\beta_1 + \cdots + c_{in}\beta_n \qquad (i = 1, \ldots k)$$

darstellen. Die Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ sind linear unabhängig; daher müssen in den Gleichungen (14.) insgesamt wenigstens k Zahlen β wirklich (d. h.

mit nicht verschwindenden, also positiven Koeffizienten) auftreten. Da wir nun Gleichung (13.) aus den Gleichungen (14.) erhalten können, indem wir diese mit den positiven Zahlen $a_1, \dots a_k$ multiplizieren und addieren, so muß in (13.) die Anzahl l der positiven Koeffizienten b_i größer oder gleich k sein. Da sich in gleicher Weise $k \geqq l$ nachweisen läßt, so muß $k = l$ sein. Dies, auf den Fall $k = 1$ angewandt, zeigt, daß jede der Zahlen α_i mit einer der Zahlen β_i bis auf einen positiven Faktor übereinstimmt. Die Strahlen $\alpha_1, \dots \alpha_n$ sind also bis auf die Reihenfolge mit den Strahlen $\beta_1 = -\alpha_{n+1}, \dots \beta_n = -\alpha_{2n}$ identisch, und damit ist gezeigt, daß sich das System A aus n Paaren von Gegenstrahlen zusammensetzt.

Es sei jetzt δ irgendein nicht zu A gehöriger Strahl vom Ursprung 0,

$$\delta = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n.$$

Dann ist die Anzahl k der nicht verschwindenden Koeffizienten a größer oder gleich 2. Wir wollen $a_1 \neq 0, \dots a_k \neq 0$ annehmen, was unbeschadet der Allgemeinheit zulässig ist, ferner $|a_i| = c_i$ $(i = 1, \dots k)$ und $\alpha_i = \gamma_i$ oder $= -\gamma_i$ $(i = 1, \dots n)$ setzen, je nachdem $a_i \geqq 0$ oder < 0 ist. Dann ergibt sich

$$\delta = c_1\gamma_1 + \cdots + c_k\gamma_k.$$

Hier sind die Koeffizienten $c_1, \dots c_k$ sämtlich > 0 und

$$\gamma_1, \cdots \gamma_n, \ -\gamma_1, \cdots -\gamma_n$$

sind in neuer Bezeichnung wieder die $2n$ Strahlen von A. Wählen wir, falls $k < n$ ist, noch $n - k$ beliebige positive Zahlen $c_{k+1}, \dots c_n$, so wird

$$\delta + c_{k+1}\gamma_{k+1} + \cdots + c_n\gamma_n + c_1 \cdot (-\gamma_1) + \cdots + c_n \cdot (-\gamma_n) = 0,$$

und aus dieser Gleichung folgt nach Satz 1., daß die $2n - k + 1$ Strahlen

$$\delta, \gamma_{k+1}, \cdots \gamma_n, \ -\gamma_1, \cdots -\gamma_n$$

ein allseitiges Strahlsystem bilden. Bis auf δ gehören alle diese Strahlen zu A, also auch zu Γ. Gehörte auch δ zu Γ, so enthielte Γ ein allseitiges Strahlsystem von $2n - k + 1$ d. h. von weniger als $2n$ Elementen. Da dies gegen die Voraussetzung ist, so ist hiermit gezeigt, daß ein nicht in A enthaltener Strahl δ auch nicht zu Γ gehören kann. Mithin ist $\Gamma = A$, und damit ist Satz 3. bewiesen*).

§ 21. Relativ allseitige Strahlsysteme.

Ein Strahlsystem A mit dem Ursprung ω soll *relativ allseitig* heißen, wenn wenigstens eine durch ω gehende lineare (mindestens eindimen-

*) Eine synthetische Ableitung aller irreduziblen Strahlsysteme in den Fällen $n = 2$ und $n = 3$ s. a. a. O., S. 9—17.

sionale) Mannigfaltigkeit Λ von solcher Art existiert, daß zu jeder Seite einer jeden durch ω gehenden, aber Λ nicht enthaltenden Ebene wenigstens ein in Λ enthaltener Strahl des Systems A liegt. Wollen wir es genauer bezeichnen, so sagen wir, daß A *innerhalb* Λ *allseitig* ist. Jedes allseitige Strahlsystem gilt auch als relativ allseitig; denn die Λ auferlegten Bedingungen sind bei einem solchen System erfüllt, wenn man für Λ den ganzen Raum nimmt. — Relativ allseitig ist insbesondere jedes Strahlsystem, das zwei Gegenstrahlen enthält. — Ist $\omega_1 + \mathsf{A}$ ein Strahlsystem höherer Stufe, und sind ω_1 und ω_2 Ursprungspunkte, so ist $\omega_1 + \mathsf{A} = \omega_2 + \mathsf{A}$ (§ 18.), woraus zu ersehen ist, daß es für die Entscheidung der Frage, ob ein Strahlsystem relativ allseitig ist oder nicht, gleichgültig ist, welchen Ursprungspunkt man zugrunde legt.

Wenn das Strahlsystem A innerhalb der r-dimensionalen Mannigfaltigkeit Λ allseitig ist, so ist auch derjenige Teil B von A, der in die Mannigfaltigkeit Λ fällt, innerhalb Λ allseitig. Eine durch den Ursprung ω gehende, Λ nicht enthaltende Ebene M schneidet Λ in einer linearen Mannigfaltigkeit M_1 von $r-1$ Dimensionen; ebenso kann jede in Λ gelegene durch ω gehende $(r-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit M_1 als Schnitt von Λ und einer Ebene M erhalten werden. Zwei Punkte oder zwei von ω ausgehende Strahlen, die Λ angehören, liegen zu verschiedenen Seiten von M_1, wenn sie zu verschiedenen Seiten von M liegen, und umgekehrt. Für das in Λ gelegene und innerhalb Λ allseitige Strahlsystem B müssen daher die Sätze gelten, die im vorigen Paragraphen für allseitige Strahlsysteme bewiesen wurden; nur ist der Raum P überall durch Λ und n durch r zu ersetzen. Insbesondere gilt also die Gleichung $\overline{\mathsf{B}} = \Lambda$. Ferner müssen — wenn wir wieder 0 als Ursprung annehmen — in B endlichviele Strahlen $\beta_1, \dots \beta_m$ existieren, unter denen wenigstens r linear unabhängig sind, und zwischen denen eine Relation $c_1\beta_1 + \cdots + c_m\beta_m = 0$ mit lauter positiven Koeffizienten besteht. Damit ist zugleich die Notwendigkeit der im folgenden Satze angegebenen Bedingung dargetan:

1. *Damit ein Strahlsystem* A *vom Ursprung* 0 *relativ allseitig sei, ist notwendig und hinreichend, daß* A *ein endliches System von Strahlen*

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$$

enthält, zwischen denen eine Relation $c_1\alpha_1 + \cdots + c_m\alpha_m = 0$ *mit lauter positiven Koeffizienten besteht.*

Zufolge § 10,2. kann man noch vorschreiben, daß $m \leqq n+1$ sein soll. — Um zu zeigen, daß die angegebene Bedingung hinreichend ist, nehmen wir an, es befinden sich unter den Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ r und nicht mehr linear unabhängige. Die Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ bilden dann die Basis eines r-dimensionalen Moduls M, und es folgt genau wie beim Beweise des Satzes § 20,1., daß sich jede Zahl dieses Modu's aus $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ mittels positiver Koeffizienten komponieren läßt, daß daher die Strahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ ein innerhalb M allseitiges System bilden, mithin A relativ einseitig ist.

Wenn ein Strahlsytem A innerhalb einer (durch seinen Ursprung gehenden) linearen Mannigfaltigkeit Λ allseitig ist, so kann eine durch den Ursprung gehende, Λ nicht enthaltende Ebene nicht Stützebene von A sein. Da ferner die durch Λ gehenden Ebenen Strahlen aus A enthalten, so folgt: *Ein relativ allseitiges Strahlsystem besitzt keine von Strahlen freie Stützebene.* Es ist nun von Wichtigkeit, daß bei Beschränkung auf abgeschlossene Strahlsysteme auch die Umkehrung gilt:

2. *Wenn ein abgeschlossenes Strahlsystem* A *keine von Strahlen freie Stützebene besitzt, so ist es relativ allseitig.*

Beweis: Wenn A keine Stützebene besitzt, so ist A allseitig. Es ist also nur der Fall zu erörtern, daß Stützebenen wohl existieren, aber in jeder Stützebene wenigstens ein Strahl aus A liegt. Wir nehmen 0 als Ursprung von A an und bezeichnen mit A_0 den Durchschnitt von A mit der Einheitskugel (das System der Richtungen der Strahlen von A). A_0 ist absolut beschränkt und, wie A, abgeschlossen. — Wir betrachten jetzt Systeme von (endlichvielen) Zahlen in bestimmter Anordnung

(15.) $$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r,$$

die den folgenden Bedingungen genügen:

1) die Zahlen $\beta_1, \ldots \beta_r$ sind linear unabhängig;

2) es gibt in A_0 wenigstens eine Zahl α, für welche die Produkte

(16.) $$\beta_1 \alpha, \ldots \beta_r \alpha$$

sämtlich verschwinden;

3) wenn es in A_0 Zahlen α gibt, für welche die Produkte (16.) nicht sämtlich verschwinden, so hat für jede solche Zahl α das erste nicht verschwindende Produkt einen negativen Wert.

Man sieht zunächst, daß es Systeme dieser Art wirklich gibt. Denn wenn β_1 eine Richtung bezeichnet, nach welcher A beschränkt ist, so ist $\beta_1 \xi = 0$ die Gleichung der Stützebene in Richtung β_1, für jede Zahl α aus A_0 wird $\beta_1 \alpha \leqq 0$, und es wird $\beta_1 \alpha = 0$, wenn man für α die Richtung eines in die Stützebene fallenden Strahles einsetzt. Die Zahl β_1 bildet also für sich ein den Bedingungen 1), 2), 3) genügendes System. — Man sieht ferner, daß die Anzahl r der Elemente eines solchen Systems $< n$ sein muß, weil für $r = n$ die Bedingungen 1), 2) nicht miteinander verträglich sind. — Es stelle jetzt (15.) irgendein den Bedingungen 1), 2), 3) genügendes System dar, es bezeichne A_k $(k = 1, \dots r)$ das System derjenigen Zahlen aus A_0, welche den Gleichungen

$$\beta_1 \xi = 0\,, \quad \beta_2 \xi = 0, \dots \beta_k \xi = 0$$

genügen, δ irgendeine aus $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_k$ nicht komponierbare Zahl. Die Systeme A_k sind als Durchschnitte abgeschlossener Punktmengen selbst abgeschlossen und als Teile des absolut beschränkten Systems A_0 selbst absolut beschränkt. Wenn daher die komplexe Veränderliche ξ eines der Systeme A_k $(k=0, 1, \dots r)$ durchläuft, so ist die stetige Funktion $\delta \xi$ beschränkt und erreicht ihre obere Grenze. Wird die obere Grenze von $\delta \mathsf{A}_k$ mit g_k bezeichnet, so ist

$$g_0 \geqq g_1 \geqq \cdots \geqq g_r,$$

da jedes System in der Reihe $\mathsf{A}_0, \mathsf{A}_1, \dots \mathsf{A}_r$ das folgende enthält. — Unser nächstes Ziel ist nun, zu beweisen, daß $g_r \geqq 0$ sein muß. Wir führen diesen Beweis durch Induktion, nehmen also an, daß entweder $r = 1$ ist, oder daß $r > 1$ und der Beweis für jedes den Bedingungen 1), 2), 3) genügende System von weniger als r Zahlen bereits geführt ist. Ferner verfahren wir indirekt; wir nehmen also an, es wäre $g_r < 0$, etwa

$$g_r = -2p, \qquad p > 0.$$

Wir bezeichnen dann mit Γ das System aller derjenigen Zahlen aus A_{r-1}, welche der Bedingung $\delta \xi \geqq -p$ genügen. Das System Γ kann leer ausgehen; wenn es aber nicht leer ist, so stellt es (als Durchschnitt des durch die Ungleichung $\delta \xi \geqq -p$ definierten Halbraums mit A_{r-1}) eine abgeschlossene und absolut beschränkte Punktmenge dar, die keinen Punkt mit A_r gemein hat. Für jede Zahl ξ aus Γ wird (im Falle $r > 1$), da sie zu A_{r-1}, nicht aber zu A_r gehört,

$$\beta_1 \xi = 0, \dots \beta_{r-1} \xi = 0,$$

dagegen $\beta_r \xi \neq 0$ und darum nach 3)

$$\beta_r \xi < 0.$$

Dies letzte gilt auch im Falle $r = 1$. Hieraus, und weil Γ abgeschlossen und absolut beschränkt ist, folgt, daß $\beta_r \Gamma$ eine negative obere Grenze hat. Wir bezeichnen sie mit $-h$; ferner mit q eine Zahl, die, wenn m die obere Grenze von $\delta \Gamma$ ist, der Bedingung $q > \frac{|m|}{h}$, wenn Γ leer ist, der Bedingung $q \geqq 0$ genügen soll, im übrigen aber willkürlich zu wählen ist. Betrachten wir nun den Ausdruck

$$(\delta + q\beta_r)\,\xi,$$

worin wir ξ die Menge A_{r-1} durchlaufen lassen. Dann ist (im Falle $r > 1$) $\beta_1 \xi = 0, \ldots \beta_{r-1} \xi = 0$, also zufolge der Bedingung 3) stets $\beta_r \xi \leqq 0$. Dies gilt wiederum auch im Falle $r = 1$. Ist ferner ξ Element von Γ, so ist $\delta \xi \leqq m \leqq |m|$, $\beta_r \xi \leqq -h$

$$(\delta + q\beta_r)\,\xi \leqq |m| - qh < |m| - \frac{|m|}{h}\,h = 0,$$

also $(\delta + q\beta_r)\,\xi < 0$. Ist ξ kein Element von Γ, so ist $\delta \xi < -p$, $\beta_r \xi \leqq 0$, also ebenfalls $(\delta + q\beta_r)\,\xi < 0$. Somit hat, wenn wir

$$\delta + q\beta_r = \delta'$$

setzen, $\delta' \mathsf{A}_{r-1}$ eine negative obere Grenze. Im Falle $r = 1$ ist das unmöglich, da sonst die Gleichung $\delta' \xi = 0$ eine Stützebene von A darstellen würde, die keinen Strahl enthielte. Somit ist die behauptete Ungleichung $g_r \geqq 0$ für den Fall $r = 1$ bewiesen. Ist aber $r > 1$, so stellen die Zahlen

$$\beta_1, \ldots \beta_{r-1}$$

ein System dar, welches ebenfalls den Bedingungen 1), 2), 3) genügt. Dann aber kann, da $\delta' = \delta + q\beta_r$ nicht aus $\beta_1, \ldots \beta_r$, also a fortiori nicht aus $\beta_1, \ldots \beta_{r-1}$ komponierbar ist, $\delta' \mathsf{A}_{r-1}$ keine negative obere Grenze haben, weil unsere Behauptung für den Fall $r - 1$ als bewiesen anzusehen ist. Damit ist die Ungleichung $g_r \geqq 0$ bewiesen.

Ist $g_r = 0$, so nimmt $\delta \xi$, wenn ξ das System A_r, also alle diejenigen Zahlen aus A_0 durchläuft, für welche $\beta_1 \xi, \ldots \beta_r \xi$ verschwinden, wenigstens einmal den Wert 0 aber niemals einen positiven Wert an. Hieraus, und weil $\beta_1, \ldots \beta_r, \delta$ linear unabhängig sind, folgt, daß diese $r + 1$ Zahlen ebenfalls den Bedingungen 1), 2), 3) genügen. — Wir wollen aber jetzt annehmen, daß das System $\beta_1, \ldots \beta_r$ schon ein solches mit möglichst vielen Elementen sei. Dann muß also $g_r > 0$ sein. Bezeichnet

jetzt M den Modul mit der Basis $\beta_1, \dots \beta_r$, N den zu M komplementären Modul, Λ eine Ebene durch den Nullpunkt, die den Modul N nicht enthält, so wird Λ durch eine Gleichung $\delta\xi = 0$ dargestellt, wo δ (also auch $-\delta$) nicht aus $\beta_1, \dots \beta_r$ komponierbar ist. Es gibt daher in A_r ein Element α_1, für welches $\delta\alpha_1 > 0$ ist, ebenso ein Element α_2, für welches $-\delta\alpha_2 > 0$ ist. Nun ist A_r der Durchschnitt von A_0 und N; α_1 und α_2 sind also die Richtungen zweier in N gelegener Strahlen aus A, und diese Strahlen liegen zu beiden Seiten der Ebene Λ. Mithin ist A innerhalb N allseitig, also ein relativ allseitiges Strahlsystem. — Somit ist Satz 2. bewiesen.

Es sei A eine beliebige Punktmenge, ω ein nicht zu A gehöriger Punkt. Wir setzen $\mathsf{A} = \omega + \mathsf{A}_1$ und bezeichnen mit $\mathsf{B} = \omega + \mathsf{B}_1$ das kleinste A enthaltende Strahlsystem vom Ursprung ω. Dann ist B_1 das kleinste A_1 enthaltende Strahlsystem vom Ursprung 0, und die Strahlen dieses Systems werden durch die Zahlen von A_1 (unter denen keine 0 ist) bezeichnet. Eine zwischen Zahlen $\alpha_1, \dots \alpha_m$ aus A_1 bestehende Gleichung $c_1\alpha_1 + \dots + c_m\alpha_m = 0$ mit positiven Koeffizienten würde der Ausdruck dafür sein, daß B_1, also auch B relativ allseitig ist (Satz 1.), sie stellte aber, da wir ja die Summe der Koeffizienten = 1 machen können, die Bedingung dafür dar, daß 0 zu $\bar{\mathsf{A}}_1$, also ω zu $\bar{\mathsf{A}}$ gehört. So folgt:

3. *Die kleinste eine Punktmenge* A *enthaltende konvexe Punktmenge* $\bar{\mathsf{A}}$ *besteht aus allen Punkten von* A *und denjenigen Punkten* ω, *für welche das kleinste* A *enthaltende Strahlsystem vom Ursprung* ω *relativ allseitig ist.*

Es sei jetzt ω ein nicht zu $\bar{\mathsf{A}}$ gehöriger Punkt, also das kleinste A enthaltende Strahlsystem B vom Ursprung ω nicht relativ allseitig. Setzen wir jetzt A als abgeschlossen und absolut beschränkt voraus, so ist B abgeschlossen (§ 17), und man kann (Satz 2.) durch ω eine Stützebene Λ von B legen, die keinen Strahl von B, also keinen Punkt von A enthält. Ist α ein Punkt aus A, dessen Abstand von Λ ein Minimum wird, so begrenzt die durch α gehende zu Λ parallele Ebene einen Halbraum, der A, also auch $\bar{\mathsf{A}}'$, nicht aber ω enthält. ω gehört also auch nicht zu $\bar{\mathsf{A}}'$, und es wird also $\bar{\mathsf{A}} = \bar{\mathsf{A}}'$. Mithin:

4. *Ist* A *eine abgeschlossene und absolut beschränkte Punktmenge, so ist auch* $\bar{\mathsf{A}}$ *abgeschlossen.*

In ähnlicher Weise zeigen wir:

5. *Ist* A *ein abgeschlossenes Strahlsystem und nicht relativ allseitig, so ist auch* $\bar{\mathsf{A}}$ *abgeschlossen.*

Beim Beweise nehmen wir 0 als Ursprung von A an und legen durch 0 eine Stützebene Λ, die keinen Strahl aus A also auch keinen Punkt des Systems A_0 enthält, das die Richtungen der Strahlen von A umfaßt. A_0 ist abgeschlossen und absolut beschränkt; dasselbe gilt von $\overline{\mathsf{A}}_0$. Ist α ein Punkt aus A_0, dessen Abstand von Λ ein Minimum ist, so schließen wir, wie beim vorigen Beweise, daß die durch α gehende zu Λ parallele Ebene einen Halbraum begrenzt, der A_0, also auch $\overline{\mathsf{A}}_0$, aber nicht den Nullpunkt enthält. Hiernach ist das kleinste $\overline{\mathsf{A}}_0$ enthaltende Strahlsystem B vom Ursprung 0 abgeschlossen und konvex. B enthält A_0, also auch A und $\overline{\mathsf{A}}$. Andererseits muß jedes konvexe A enthaltende Strahlsystem auch A_0, also auch $\overline{\mathsf{A}}_0$, also auch B enthalten. Somit ist B in $\overline{\mathsf{A}}$ enthalten, und es wird daher $\mathsf{B} = \overline{\mathsf{A}}$. Da B abgeschlossen ist, ist 5. bewiesen.

Um zu zeigen, daß in Satz 4. die Worte „und absolut beschränkt" nicht fortgelassen werden dürfen, (falls $n > 1$), betrachten wir eine abgeschlossene, aber nicht absolut beschränkte Punktmenge A, die aus einer Ebene Λ und einem Punkt ω außerhalb Λ besteht. Ist Λ_1 die Parallelebene zu Λ durch ω, so besteht $\overline{\mathsf{A}}'$ aus Λ, Λ_1 und allen Punkten zwischen diesen Ebenen, $\overline{\mathsf{A}}$ aber enthält von den Punkten der Ebene Λ_1 nur den Punkt ω, ist also nicht abgeschlossen.

Daß ebensowenig in Satz 5. der Zusatz „und nicht relativ allseitig" entbehrt werden kann (falls $n \geqq 3$ ist), zeigt das folgende Beispiel, dessen geometrische Deutung und genauere Durchrechnung wir dem Leser überlassen. Es seien α und β zwei zueinander senkrechte Richtungen. Die Punkte ξ, welche wenigstens einer der beiden Ungleichungen

$$(\alpha + \beta)\,\xi \geqq |\xi|, \quad (\alpha - \beta)\,\xi \geqq |\xi|$$

genügen, konstituieren ein abgeschlossenes Strahlsystem Γ, das aber relativ allseitig ist. Diejenigen Punkte ξ, welche der Gleichung $\alpha\xi = 0$ genügen, aber nicht von der Form $c\beta$ sind, gehören dann der Punktmenge $\overline{\Gamma}'$, nicht aber $\overline{\Gamma}$ an. $\overline{\Gamma}$ ist also nicht abgeschlossen.

§ 22. Reihen von entschiedener Divergenz.

Wir wenden uns jetzt wieder Untersuchungen über Reihen zu und werden dabei Gelegenheit haben, die zuletzt hergeleiteten Resultate anzuwenden. In der Folge bedienen wir uns großer Buchstaben vielfach zur Bezeichnung von Reihen, bei denen auf die Anordnung der Glieder wohl zu achten ist. Kleine Buchstaben bedeuten wie früher einzelne Zahlen.

Bedeuten A und B zwei Reihen, so soll durch $A+B$ bzw. $A-B$ die Reihe bezeichnet werden, die man erhält, indem man die entsprechenden Glieder von A und B addiert bzw. subtrahiert; pA bedeutet die aus A durch Multiplikation aller Glieder mit p hervorgehende Reihe. — Zwei Reihen A, B sollen *äquivalent* heißen, wenn die Reihe $A-B$ konvergiert; *eigentlich äquivalent*, wenn $A-B$ unbedingt konvergiert. Man sieht sofort, daß diese Äquivalenzbegriffe die Bedingungen erfüllen, unter denen allein man die Bezeichnung „äquivalent" einzuführen pflegt. D. h. die Beziehung der (eigentlichen) Äquivalenz ist eine wechselseitige, und wenn zwei Reihen einer dritten (eigentlich) äquivalent sind, so sind sie einander (eigentlich) äquivalent. — Das Bisherige soll in gleicher Weise für reelle wie für komplexe Reihen und Zahlen gelten. Fortan aber wollen wir wieder in der Bezeichnung Reelles und Komplexes durch lateinische und griechische Buchstaben unterscheiden.

Wir betrachten zunächst eine reelle Reihe C

$$c_0 + c_1 + \cdots$$

und setzen

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_k = s_k. \qquad (k=0, 1, \ldots)$$

Läßt sich zu jedem reellen p ein Index n so bestimmen, daß für $k > n$ stets $s_k > p$ (bzw. stets $s_k < p$) ist, so wird gesagt, daß die Reihe C *nach* $+\infty$ (bzw. *nach* $-\infty$) *divergiert*. Wenn C nach $+\infty$ bzw. $-\infty$ divergiert, so gilt dasselbe für jede äquivalente Reihe. Wenn die positiven (negativen) Glieder der Reihe C eine divergente Reihe bilden, so läßt sich aus ihr in bekannter Weise durch Umordnen der Glieder eine Reihe herstellen, die nach $+\infty$ (bzw. $-\infty$) divergiert. Soll daher C *unbedingt*, d. h. auch nach jeder Umordnung der Glieder nach $+\infty$ divergieren, so ist notwendig und hinreichend, daß die positiven Glieder von C eine divergente, die negativen (falls solche existieren) eine konvergente Reihe bilden. Wenn C unbedingt nach $+\infty$ divergiert, so gilt dasselbe für jede zu C eigentlich äquivalente Reihe.

Eine divergente reelle Reihe ohne negative Glieder soll kurz *positive divergente Reihe* heißen. Eine solche Reihe divergiert unbedingt nach $+\infty$, ebenso jede zu ihr eigentlich äquivalente Reihe. Wenn andererseits eine Reihe C unbedingt nach $+\infty$ divergiert, so ist sie zu der positiven divergenten Reihe, die man erhält, indem man alle negativen Glieder von C durch Nullen ersetzt, eigentlich äquivalent.

Wir sagen, daß die Reihe C *entschieden nach* $+\infty$ *divergiert*, wenn sie einer positiven divergenten Reihe (eigentlich oder uneigentlich) äquivalent ist. Jede Reihe die unbedingt nach $+\infty$ divergiert, divergiert auch entschieden nach $+\infty$. Ein Beispiel für die Nichtumkehrbarkeit dieses Satzes ist die Reihe

$$\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{10} - \tfrac{1}{12} + \cdots .$$

Sie ist der Reihe

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{12} + \cdots$$

(uneigentlich) äquivalent und hat einen divergenten negativen Bestandteil, divergiert also entschieden aber nicht unbedingt nach $+\infty$.

Ist die mit C bezeichnete Reihe

$$c_1 + c_2 + \cdots$$

positiv und divergent, p eine positive Zahl, k der kleinste Index, für den

$$s_k = c_1 + c_2 + \cdots + c_k > p$$

wird, und bezeichnet D die Reihe

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_{k-1} + (p - s_{k-1}) + 0 + 0 + 0 + \cdots,$$

wobei im Falle $k = 1$ $s_{k-1} = 0$ zu setzen ist, so ist C zu den positiven Reihen $C_1 = C - D$ und $C_2 = C + D$ äquivalent, und die konvergenten Reihen $C - C_1$ und $C - C_2$ haben die Zahlen p und $-p$ zur Summe. Man kann daher zu jeder entschieden nach $+\infty$ divergenten Reihe C eine solche äquivalente positive Reihe C_1 finden, daß $C - C_1$ eine beliebig vorgeschriebene Summe hat.

Wir kommen jetzt zu komplexen Reihen. Eine Reihe Γ soll *entschieden divergent in Richtung* α heißen, wenn sie einer Reihe von der Form $C\alpha$ äquivalent ist, wo C entschieden nach $+\infty$ divergiert. Man hat in diesem Falle eine Gleichung

$$\Gamma = C\alpha + \mathsf{B}, \tag{17.}$$

wo B konvergiert. Durch Multiplikation mit einer Richtung δ erhalten wir aus (17.) die Gleichung $\Gamma\delta = C\alpha\delta + \mathsf{B}\delta$, welche zeigt, daß die reelle Reihe $\Gamma\delta$ zu $C\alpha\delta$ äquivalent ist, also entschieden nach $+\infty$ divergiert, wenn $\sphericalangle(\alpha, \delta) < \frac{\pi}{2}$ ist, entschieden nach $-\infty$ divergiert, wenn $\sphericalangle(\alpha, \delta) > \frac{\pi}{2}$ ist, und konvergiert, wenn $\sphericalangle(\alpha, \delta) = \frac{\pi}{2}$ ist. Da eine Richtung durch diejenigen Richtungen, mit denen sie spitze Winkel bildet, eindeutig bestimmt ist, so folgt hieraus auch, daß eine und dieselbe Reihe nicht nach zwei

verschiedenen Richtungen entschieden divergieren kann. — Aus (17.) ergibt sich speziell durch Multiplikation mit α

$$(18.) \qquad \Gamma\alpha = C + \mathsf{B}\acute{\alpha},$$

und wenn man nochmals mit α multipliziert, $(\Gamma\alpha)\alpha = C\alpha + (\mathsf{B}\alpha)\alpha$, also wegen (17.)

$$(19.) \qquad \Gamma - (\Gamma\alpha)\alpha = \mathsf{B} - (\mathsf{B}\alpha)\alpha.$$

Da die Reihen B, $\mathsf{B}\alpha$, $(\mathsf{B}\alpha)\alpha$ konvergieren, so drückt (18.) aus, daß $\Gamma\alpha$ mit C äquivalent ist, also entschieden nach $+\infty$ divergiert, während (19.) zeigt, daß $\Gamma - (\Gamma\alpha)\alpha$ konvergiert. Andererseits gilt für jede Reihe Γ, wenn $\Gamma\alpha = C$, $\Gamma - (\Gamma\alpha)\alpha = \mathsf{B}$ gesetzt wird, die Gleichung

$$\Gamma = C\alpha + \mathsf{B}.$$

Es ist also, damit Γ in Richtung α entschieden divergiert, notwendig und hinreichend, daß $\Gamma\alpha$ entschieden nach $+\infty$ divergiert und $\Gamma - (\Gamma\alpha)\alpha$ konvergiert.

Es sei Γ eine in Richtung α entschieden divergente Reihe. Hat man dann zwei Gleichungen $\Gamma = C\alpha + \mathsf{B}$, $\Gamma = C_1\alpha + \mathsf{B}_1$, wo C, C_1 entschieden nach $+\infty$ divergieren, B, B_1 konvergieren, so sind C, C_1 mit $\Gamma\alpha$, also auch miteinander äquivalent. Bezeichnen β, β_1 und r die Summen der konvergenten Reihen B, B_1 und $C - C_1$, so folgt aus $\mathsf{B}_1 = \mathsf{B} + (C - C_1)\alpha$ die Gleichung $\beta_1 = \beta + r\alpha$. Ist andererseits die Darstellung $\Gamma = C\alpha + \mathsf{B}$ und eine reelle Zahl r gegeben, so kann man, wie oben gezeigt wurde, eine zu C äquivalente Reihe C_1, von der man noch fordern kann, daß sie positiv sein soll, so finden, daß die Reihe $C - C_1$ die Summe r hat. Setzt man dann $\mathsf{B} + (C - C_1)\alpha = \mathsf{B}_1$, so wird $\Gamma = C_1\alpha + \mathsf{B}_1$ und $\beta + r\alpha$ die Summe der Reihe B_1. Durchläuft r die reellen Zahlen, so beschreibt $\beta + r\alpha$ eine Gerade, deren eine Richtung α ist. *Zu einer in Richtung α entschieden divergenten Reihe Γ gehört also eine bestimmte Gerade dieser Richtung. Die Punkte dieser Geraden stellen die Summen derjenigen Reihen B dar, die man erhält, wenn man Γ in der Form $\Gamma = C\alpha + \mathsf{B}$ schreibt, wo C eine positive divergente (oder auch eine entschieden nach $+\infty$ divergierende), B eine konvergente Reihe bedeutet.*

Wenn nicht nur die Reihe Γ selbst, sondern auch jede aus ihr durch Umstellung hervorgehende Reihe in Richtung α entschieden divergiert, so sagen wir: Γ *divergiert unbedingt entschieden in Richtung α.* Hierfür ist, wie aus dem Vorangehenden erhellt, notwendig und hinreichend,

daß $C_1 = \Gamma\alpha$ bei jeder Anordnung entschieden nach $+\infty$, mithin unbedingt nach $+\infty$ divergiert, und daß $\mathsf{B}_1 = \Gamma - (\Gamma\alpha)\alpha$ bei jeder Anordnung, also unbedingt konvergiert. Zu C_1 läßt sich aber eine eigentlich äquivalente positive divergente Reihe C finden. Wir erhalten also als eine notwendige aber, wie man sofort sieht, auch hinreichende Bedingung für die unbedingt entschiedene Divergenz der Reihe Γ in Richtung α das Bestehen einer Gleichung von der Form $\Gamma = C\alpha + \mathsf{B}$, wo C eine positive divergente, B eine unbedingt konvergente Reihe bezeichnet.

Anmerkung. Im Vorangehenden wurde der Begriff der entschiedenen Divergenz nach einer Richtung α eingeführt, während von Divergenz nach der Richtung α schlechthin nicht die Rede war. Wollte man diesen Begriff einführen, so wäre es naturgemäß, ihn so zu fassen: „Die Reihe

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots$$

divergiert in Richtung α, wenn die absoluten Werte der Summen

$$\sigma_k = \gamma_0 + \cdots + \gamma_k$$

mit wachsendem k nach $+\infty$ divergieren und außerdem die Beziehung $\lim_{k=\infty} \frac{\sigma_k}{|\sigma_k|} = \alpha$ besteht.“ Man überzeugt sich leicht, daß die nach der früheren Definition in Richtung α entschieden divergenten Reihen dieser Bedingung genügen. Als unbedingt in Richtung α divergent würde dann eine Reihe zu bezeichnen sein, die bei jeder Anordnung der Glieder in Richtung α divergiert. Während aber im reellen Gebiete der Satz gilt, daß jede Reihe, die unbedingt nach $+\infty$ divergiert auch entschieden nach $+\infty$ divergiert, braucht eine komplexe unbedingt in Richtung α divergente Reihe nicht entschieden in Richtung α zu divergieren, wie die Reihe

$$(\alpha + \beta) + \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\beta}{2}\right) + \left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}} + \frac{\beta}{3}\right) + \cdots$$

zeigt, wo β eine von $\pm\alpha$ verschiedene Richtung bezeichnet.

§ 23. Ineinanderschieben von Reihen.

Die sämtlichen Glieder zweier Reihen A, B können auf mannigfache Weise zu einer einzigen Reihe C angeordnet werden. Geschieht dies in der Weise, daß man aus der Reihe C, indem man alle zu B bzw. alle zu A gehörigen Glieder streicht, wieder die Reihe A bzw. B in ihrer ursprünglichen Anordnung erhält, so sagen wir: „C ist aus A und B durch *Inein-*

anderschieben entstanden". Entsprechend ist das Ineinanderschieben von mehr als zwei Reihen zu verstehen.

Ist C durch Ineinanderschieben zweier (unbedingt) konvergenter Reihen A und B entstanden, so ist, wie man sofort sieht, auch C (unbedingt) konvergent, und zwischen den Summen a, b, c der Reihen A, B, C besteht die Beziehung $c = a + b$. Daraus folgt weiter: Ist C aus A und B durch Ineinanderschieben gebildet, und ersetzt man in C die Glieder von A und B durch die entsprechenden Glieder zweier Reihen A_1, B_1, von denen A_1 zu A, B_1 zu B (eigentlich) äquivalent ist, so geht auch C in eine (eigentlich) äquivalente Reihe über. — Dies gilt im komplexen Gebiet wie im reellen.

Im folgenden betrachten wir ausschließlich Reihen, deren Glieder nach 0 konvergieren. Diese Eigenschaft bleibt beim Ineinanderschieben von Reihen und beim Ersetzen durch äquivalente erhalten.

Es seien mit A, B, C drei reelle Reihen

$$a_0 + a_1 + \cdots, \quad b_0 + b_1 + \cdots, \quad c_0 + c_1 + \cdots$$

bezeichnet, welche den Bedingungen $\lim_{k=\infty} a_k = \lim_{k=\infty} b_k = \lim_{k=\infty} c_k = 0$ genügen, und es werde A als positiv divergent, B als negativ divergent vorausgesetzt. Dann zeigt man durch eine einfache Modifikation des *Riemann*schen Verfahrens, daß man A, B, C zu einer konvergenten Reihe mit vorgeschriebener Summe s ineinanderschieben kann: Man beginne mit c_0, lasse, je nachdem $c_0 \leqq s$ oder $> s$ ist, erst eine Gruppe von Gliedern a folgen, bis die Summe $> s$ geworden ist, dann eine Gruppe von Gliedern b, bis die Summe wieder $< s$ ist, oder umgekehrt. Nun nehme man c_1, darauf, je nachdem der erhaltene Wert $\leqq s$ oder $> s$ ist, erst eine Gruppe von Gliedern a, dann eine Gruppe von Gliedern b, oder umgekehrt, nach demselben Prinzip wie vorher. Dann nehme man c_2 und fahre in gleicher Weise fort. So wird man zu einer eindeutig bestimmten Reihe geführt. Bricht man diese am Ende einer Gruppe aus A oder B ab, so ist die Abweichung von s höchstens gleich dem letzten Gliede; bricht man inmitten einer Gruppe aus A oder B ab, und gehört das letzte dieser Gruppe vorangehende Glied zu B bzw. A, so ist die Abweichung höchstens gleich diesem Gliede; bricht man endlich inmitten einer Gruppe aus A oder B ab, der ein Glied c unmittelbar vorangeht, oder direkt hinter einem Gliede c,

so ist die Abweichung höchstens gleich dem absoluten Werte von c vermehrt um den absoluten Wert des c vorangehenden Gliedes. Hieraus folgt, daß die konstruierte Reihe nach s konvergiert. — Dasselbe können wir erreichen, wenn die Reihen A und B nicht als positiv bzw. negativ divergent, sondern nur als entschieden nach $+\infty$ bzw. $-\infty$ divergierend vorausgesetzt werden. Denn alsdann kann man eine positive zu A äquivalente Reihe A_1 und eine negative zu B äquivalente Reihe B_1 so wählen, daß die Summen der Reihen $A - A_1$ und $B - B_1$ gleich 0 werden. Schiebt man die Reihen A_1, B_1, C nach dem beschriebenen Verfahren zu einer Reihe mit der Summe s zusammen, und ersetzt man in dieser Reihe die Elemente aus A_1 und B_1 durch die entsprechenden aus A und B, so hat man das gewünschte Resultat. Es gilt also:

1. *Sind A, B, C reelle Reihen, deren Glieder nach 0 konvergieren, und divergiert A entschieden nach $+\infty$, B entschieden nach $-\infty$, so kann man durch Ineinanderschieben der drei Reihen eine konvergente Reihe mit beliebig vorgeschriebener Summe s erhalten.*

Wir beweisen jetzt:

2. *Sind $A_1, \dots A_k$ positive divergente Reihen, deren Glieder nach 0 konvergieren, $\alpha_1, \dots \alpha_k$ beliebige komplexe Zahlen, γ eine Zahl, die sich aus $\alpha_1, \dots \alpha_k$ mittels positiver Koeffizienten komponieren läßt, endlich $\mathsf{A}_1, \dots \mathsf{A}_k$ Reihen, die den Reihen $A_1\alpha_1, \dots A_k\alpha_k$ äquivalent sind, so kann man aus $\mathsf{A}_1, \dots \mathsf{A}_k$ durch Ineinanderschieben eine Reihe Γ bilden, die einer Reihe von der Form $C\gamma$ äquivalent ist, wo C wiederum positiv und divergent ist.*

Es genügt, den Satz für den speziellen Fall $k = 2$ zu beweisen, da man offenbar durch wiederholte Anwendung des speziellen Satzes den allgemeinen für beliebiges k erhält. Ferner braucht der Satz nur für den Fall, daß die Reihen A_i mit den Reihen $A_i\alpha_i$ $(i = 1, \dots k)$ identisch sind, bewiesen zu werden, da alsdann sofort folgt, daß derselbe Satz auch gilt, wenn statt der Identität nur Äquivalenz besteht. — Es seien also jetzt α, β, γ drei komplexe Zahlen, zwischen denen eine Gleichung

$$\gamma = p\alpha + q\beta \quad (p > 0, q > 0)$$

besteht, A und B zwei komplexe Reihen von der Form

$$\mathsf{A} = A\alpha, \quad \mathsf{B} = B\beta,$$

wo A und B positive divergente Reihen sind, deren Glieder nach 0 konvergieren. Dann kommt es darauf an, aus A und B durch Ineinander-

schieben eine Reihe Γ zu bilden, die einer Reihe von der Form $C\gamma$ äquivalent ist, wo C wieder eine positive divergente Reihe bezeichnet. Wir setzen

$$p\alpha - q\beta = \delta, \quad \frac{1}{2p} = k, \quad \frac{1}{2q} = l.$$

Dann wird

$$\alpha = k\gamma + k\delta, \quad \beta = l\gamma - l\delta, \quad \mathsf{A} = kA\gamma + kA\delta, \quad \mathsf{B} = lB\gamma - lB\delta.$$

Jede aus A und B durch Ineinanderschieben gebildete Reihe hat die Form

$$\Gamma = P\gamma + Q\delta,$$

wo P aus kA und lB, Q aus kA und $-lB$ durch Ineinanderschieben entstanden sind. Da kA und lB positive divergente Reihen sind, so hat P in jedem Falle dieselbe Eigenschaft, und da die Reihenglieder nach 0 konvergieren, so kann man das Ineinanderschieben so gestalten, daß Q konvergent ausfällt. Dann aber ist Γ zu $P\gamma$ äquivalent und somit unser Satz bewiesen.

Nehmen wir an, daß die in Satz 2. bezeichneten Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_k, \gamma$ Richtungen sind, so können wir ihn folgendermaßen aussprechen:

2a. *Wenn die Reihen* $\mathsf{A}_1, \ldots \mathsf{A}_k$, *deren Glieder nach* 0 *konvergieren, bzw. nach den Richtungen* $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ *entschieden divergieren, und die Richtung* γ *aus den Richtungen* $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ *mittels positiver Koeffizienten komponierbar ist, so lassen sich die Reihen zu einer Reihe ineinanderschieben, die in Richtung* γ *entschieden divergiert.*

§ 24. Hauptstrahlen einer Zahlenmenge.

Den folgenden Betrachtungen legen wir ein elementares abzählbares System Γ von komplexen Zahlen zugrunde.

Ist α eine Richtung, x ein reeller Wert zwischen 0 und π (die Grenzen eingeschlossen), so bezeichne $f(\alpha, x)$ die Summe der absoluten Werte derjenigen (von 0 verschiedenen) Zahlen γ aus Γ, für welche $\sphericalangle(\alpha, \gamma) \leqq x$ ist*). Enthält Γ keine solche Zahlen, so ist $f(\alpha, x) = 0$ zu setzen; haben die genannten absoluten Werte keine endliche Summe, so schreiben wir $f(\alpha, x) = \infty$. $f(\alpha, \pi)$ ist die Summe der absoluten Werte aller Zahlen aus Γ. Schließen wir also jetzt den Fall der absoluten

*) Das Symbol $\sphericalangle(\alpha, \gamma)$ bezeichne, wenn α, γ beliebige Zahlen $\neq 0$ sind, den Winkel zwischen den Richtungen $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ und $\frac{\gamma}{|\gamma|}$.

Summierbarkeit aus, so ist $f(\alpha, \pi) = \infty$. Mit $g(\alpha)$ bezeichnen wir die größte Zahl x des Intervalles von 0 bis π, für welche $f(\alpha, x)$ noch endlich, oder die kleinste, für welche $f(\alpha, x)$ unendlich ist. Diejenigen Richtungen α, für welche $g(\alpha) = 0$ ist, sollen *Hauptrichtungen*, die durch sie bestimmten Strahlen vom Ursprung 0 *Hauptstrahlen* der Zahlenmenge Γ heißen.

Ist u der Winkel zweier Richtungen α, β, x eine Zahl zwischen 0 und $\pi - u$, so genügt jede Zahl γ, für welche $\sphericalangle(\beta, \gamma) \leqq x$ ist, auch der Ungleichung $\sphericalangle(\alpha, \gamma) \leqq u + x$ (§ 17). Daraus folgt $f(\alpha, u + x) \geqq f(\beta, x)$ und hieraus $g(\alpha) \leqq g(\beta) + u$. Ebenso ist $g(\beta) \leqq g(\alpha) + u$, also

$$|g(\alpha) - g(\beta)| \leqq \sphericalangle(\alpha, \beta).$$

Dies zeigt, daß $g(\xi)$ eine stetige Funktion der Richtung ξ ist.

Es sei A ein abgeschlossenes Strahlsystem vom Ursprung 0, A_0 das System der Richtungen seiner Strahlen. Nehmen wir an, daß A keinen Hauptstrahl von Γ, also A_0 keine Nullstelle von $g(\xi)$ besitzt. Dann hat die stetige Funktion $g(\xi)$ innerhalb der abgeschlossenen und absolut beschränkten Punktmenge A_0 ein positives Minimum p. A_0 ist in dem „n-dimensionalen Würfel“ enthalten, der die Punkte umfaßt, deren absolute Koordinaten den Wert 1 nicht übersteigen, also von den $2n$ Ebenen mit den Gleichungen $\varepsilon_i \xi = \pm 1$ $(i = 1, \ldots n)$ begrenzt wird. Nehmen wir, unter m eine natürliche Zahl verstehend, noch die $n(2m-1)$ Ebenen mit den Gleichungen

$$\varepsilon_i \xi = \frac{k}{m} \qquad (i = 1, \ldots n;\ k = -m+1, -m+2, \ldots 0, \ldots m-2, m-1)$$

hinzu, so wird durch sie der Würfel in $(2m)^n$ Teilwürfel zerlegt. Dabei mögen Punkte, die auf der Grenze mehrerer Würfel liegen, zu allen diesen Würfeln gerechnet werden. Gehören α und β demselben Teilwürfel an, so übersteigen die absoluten Koordinaten von $\alpha - \beta$ den Wert $\frac{1}{m}$ nicht; der Abstand $|\alpha - \beta|$ ist also $\leqq \frac{\sqrt{n}}{m}$. Wählen wir aus denjenigen Teilwürfeln, welche Punkte aus A_0 enthalten, je einen solchen Punkt aus, so haben wir eine endliche Anzahl von Punkten $\alpha_1, \ldots \alpha_s$ aus A_0 von der Beschaffenheit, daß für jeden Punkt α aus A_0 wenigstens einer der Abstände

$$|\alpha - \alpha_i| \qquad (i = 1, \ldots s)$$

$\leqq \frac{\sqrt{n}}{m}$ ausfällt. Nun ist $|\alpha - \alpha_i| = 2 \sin \frac{(\alpha, \alpha_i)}{2}$. Es ist also i so wählbar, daß

$$\frac{\sphericalangle(\alpha, \alpha_i)}{2} \leqq \arcsin \frac{\sqrt{n}}{2m}$$

wird. Dabei ist der arcus zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ zu nehmen. Wählen wir m so groß, daß $\arcsin \frac{\sqrt{n}}{2m} < \frac{p}{2}$ wird, so folgt, wenn wir $2 \arcsin \frac{\sqrt{n}}{2m} = p'$ setzen,

$$\sphericalangle(\alpha, \alpha_i) \leqq p' < p.$$

Der absolute Wert einer jeden dem Strahlsystem A angehörigen Zahl aus Γ tritt daher wenigstens in einem der Ausdrücke

$$f(\alpha_1, p'), \ldots f(\alpha_s, p')$$

als Summand auf. Alle diese Summen sind endlich, da ja die Werte $g(\alpha_1), \ldots g(\alpha_s)$ sämtlich $\geqq p$ also $> p'$ sind. Somit erhalten wir den Satz:

1. *Enthält ein abgeschlossenes Strahlsystem* A *vom Ursprung* 0 *keinen Hauptstrahl der Zahlenmenge* Γ, *so hat die Summe der absoluten Werte aller derjenigen Zahlen aus* Γ, *welche* A *angehören, einen endlichen Wert.*

Daraus folgt, da Γ nicht unbedingt summierbar ist, die Existenz wenigstens eines Hauptstrahls. Da die Hauptrichtungen die Nullstellen der stetigen Funktion $g(\xi)$ darstellen, so konstituieren sie, ebenso wie die Hauptstrahlen, ein abgeschlossenes System. Lassen wir daher, unter α eine feste, unter ξ eine variable Richtung verstehend, diese die Hauptrichtungen durchlaufen, so hat die stetige Funktion $\sphericalangle(\alpha, \xi)$ ein Minimum w. Genügt dann die reelle Zahl x der Ungleichung $0 \leqq x < w$, so enthält das abgeschlossene durch die Ungleichung $\sphericalangle(\alpha, \xi) \leqq x$ definierte System von Richtungen keine Hauptrichtung, und es ist $f(\alpha, x)$ endlich. Ist aber $w < x \leqq \pi$ und β ein Hauptstrahl, der mit α den Winkel w bildet, so ist die Summe $f(\beta, x - w)$ ein Teil der Summe $f(\alpha, x)$. Es ist $f(\beta, x - w) = \infty$, also auch $f(\alpha, x) = \infty$. Mithin ergibt sich $g(\alpha) = w$, d. h.

2. $g(\alpha)$ *ist gleich dem kleinsten unter den Winkeln, welche die Richtung* α *mit den Hauptrichtungen bildet.*

Wir bezeichnen, wie früher, mit Γ_* das System der Partialsummen von Γ. Ist für eine Richtung α das reelle System $\alpha\Gamma_*$ nach oben beschränkt, so ist seine obere Grenze gleich der Summe der positiven Elemente aus $\alpha\Gamma$; ist $\alpha\Gamma_*$ nach oben unbeschränkt, so ist jene Summe divergent. Wir nennen deshalb die Richtung (bzw. den Strahl) α im

ersten Fall Konvergenzrichtung (Konvergenzstrahl), im zweiten Divergenzrichtung (Divergenzstrahl) von Γ.

3. *Ist* $g(\alpha) < \frac{\pi}{2}$, *so ist* α *Divergenzrichtung, ist* $g(\alpha) > \frac{\pi}{2}$, *so ist* α *Konvergenzrichtung.*

Ist nämlich $g(\alpha) = u < \frac{\pi}{2}$, β eine der Bedingung $\sphericalangle(\alpha, \beta) = u$ genügende Hauptrichtung, v eine positive Zahl $< \frac{\pi}{2} - u$, und bezeichnet δ jede von 0 verschiedene und der Bedingung $\sphericalangle(\beta, \delta) \leqq v$ genügende Zahl aus Γ, so ist $\Sigma|\delta| = f(\beta, v) = \infty$, $\sphericalangle(\alpha, \delta) \leqq u + v < \frac{\pi}{2}$, $\alpha\delta = |\delta| \cos(\alpha, \delta) \geqq |\delta| \cos(u + v) > 0$,

$$\Sigma\alpha\delta \geqq \cos(u + v)\, \Sigma|\delta| = \infty.$$

Ist dagegen $g(\alpha) > \frac{\pi}{2}$, und bezeichnet δ jede der Bedingung $\sphericalangle(\alpha, \delta) \leqq \frac{\pi}{2}$ oder, was dasselbe besagt, jede der Bedingung $\alpha\delta \geqq 0$ genügende Zahl aus Γ, so folgt aus $\alpha\delta \leqq |\delta|$, daß $\Sigma\alpha\delta \leqq \Sigma|\delta| = f\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$, mithin endlich ist.

Nehmen wir an, daß eine aus den Elementen des Systems Γ gebildete Reihe unbedingt entschieden in Richtung α divergiert. Bezeichnen wir dann für den Augenblick diese Reihe selbst mit Γ, und wenden wir die in § 22 eingeführte Symbolik an, so haben wir eine Gleichung

$$\Gamma = C\alpha + \mathsf{B},$$

wo C unbedingt nach $+\infty$ divergiert, B unbedingt konvergiert. Da die positiven Glieder von C eine divergente, die negativen eine konvergente Reihe bilden und $\mathsf{B}\xi$ für jedes ξ unbedingt konvergiert, so ergeben die positiven Glieder in $\Gamma\xi = C\alpha\xi + \mathsf{B}\xi$ dann und nur dann eine divergente Reihe, wenn $\alpha\xi > 0$ ist. Die Konvergenzstrahlen des Systems Γ erfüllen also den durch die Ungleichung $\alpha\xi \leqq 0$ definierten Halbraum. — Nehmen wir umgekehrt jetzt an, daß die Konvergenzstrahlen des Systems Γ den Halbraum $\alpha\xi \leqq 0$ erfüllen. Bezeichnen wir dann eine aus den Elementen dieses Systems gebildete Reihe wieder mit Γ, und setzen wir $\Gamma\alpha = C$, $\Gamma - C\alpha = \mathsf{B}$, so wird, da α Divergenz-, $-\alpha$ Konvergenzrichtung ist, $C = \Gamma\alpha$ unbedingt nach $+\infty$ divergieren. Ferner wird für jede der Bedingung $\alpha\eta = 0$ genügende Zahl η, da die Strahlen η, $-\eta$ beide Konvergenzstrahlen sind, $\Gamma\eta$ unbedingt konvergent. Ist nun ξ eine beliebige Zahl,

und setzt man $\alpha\xi = c$, $\xi - c\alpha = \eta$, so wird $\alpha\eta = \alpha\xi - c = 0$; also ist $\mathsf{B}\xi = (\Gamma - C\alpha)(c\alpha + \eta) = c(\Gamma\alpha - C) + \Gamma\eta - C\alpha\eta = \Gamma\eta$ für jedes ξ unbedingt konvergent, also B selbst unbedingt konvergent, mithin $\Gamma = C\alpha + \mathsf{B}$ in Richtung α unbedingt entschieden divergent. Also:

4. *Damit die aus den Elementen von Γ gebildeten Reihen unbedingt entschieden in Richtung α divergieren, ist notwendig und hinreichend, daß die Konvergenzstrahlen von Γ den Halbraum $\alpha\xi \leqq 0$ konstituieren.*

Da nach den Sätzen 2. und 3. jede Richtung, die mit einer Hauptrichtung einen spitzen Winkel bildet, Divergenzrichtung ist, und da α die einzige Richtung ist, die mit keiner der Ungleichung $\alpha\xi \leqq 0$ genügenden Richtung einen spitzen Winkel bildet, so können wir Satz 4. auch so formulieren:

4a. *Damit die aus den Elementen von Γ gebildeten Reihen unbedingt entschieden in Richtung α divergieren, ist notwendig und hinreichend, daß α einzige Hauptrichtung ist und die zu α senkrechten Richtungen sämtlich Konvergenzrichtungen sind.*

Es sei wieder Γ ein abzählbares elementares System, α eine Hauptrichtung von Γ. Lassen wir aus Γ alle Elemente γ fort, für welche $\sphericalangle(\alpha, \gamma)$ oberhalb einer festen positiven Zahl liegt, so ist α auch noch Hauptrichtung des zurückbleibenden Systems. Dasselbe ist der Fall, wenn wir alle die Elemente fortlassen, deren absoluter Wert oberhalb einer festen positiven Zahl liegt, da es nur endlichviele solche Elemente gibt. Wir denken uns nun das System Γ (unter Weglassung der Nullen) zu einer unendlichen Folge

(20.) $$\gamma_0, \gamma_1, \cdots$$

angeordnet und bezeichnen mit

(21.) $$c_0 + c_1 + \cdots + c_k + \cdots$$

eine konvergente Reihe positiver monoton abnehmender Zahlen, deren erste c_0 schon < 1 sein soll. Wir lassen jetzt von den Elementen der Folge (20.) alle diejenigen γ fort, für welche $|\gamma| > c_0$ oder $\sphericalangle(\alpha, \gamma) >$ arc sin c_0 (der arcus zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ genommen) ist. Von der zurückbleibenden Folge Γ_0 nehmen wir, unter Wahrung der Reihenfolge so viele Glieder bis die Summe ihrer absoluten Werte zum erstenmal 1 überschreitet. Die so erhaltene Gruppe von Elementen sei mit Δ_0 bezeichnet. Lassen wir sie sowie alle Glieder γ, für welche $|\gamma| > c_1$ oder $\sphericalangle(\alpha, \gamma) >$ arc sin c_1 ist, aus Γ_0 fort,

so bleibt eine Folge Γ_1 zurück. Dieser entnehmen wir nun wieder so viele Glieder, bis die Summe ihrer absoluten Werte > 1 ist (Gruppe Δ_1), und gelangen, indem wir noch die Elemente γ, für welche $|\gamma| > c_2$ oder $\sphericalangle(\alpha, \gamma) > \arcsin c_2$ ist, fortlassen, zu einer Folge Γ_2, u. s. f. Die nach diesem Verfahren erhaltenen endlichen Folgen $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ reihen wir zu einer unendlichen Folge Δ aneinander. In jeder Teilfolge ist die Summe der absoluten Werte > 1 und < 2, nämlich $\leqq 1 + c_k$ in Δ_k. Durchläuft δ alle Zahlen von Δ, so wird $\Sigma|\delta| = \infty$. Nun gelten für jedes $\delta \neq 0$ die Gleichungen

$$\text{(22.)} \qquad \alpha\delta = |\delta| \cos(\alpha, \delta),\ (\alpha\delta)^2 = \delta^2 \cos^2(\alpha, \delta),$$

$$(\delta - (\alpha\delta)\alpha)^2 = \delta^2 + (\alpha\delta)^2 - 2(\alpha\delta)^2 = \delta^2 - (\alpha\delta)^2 = \delta^2(1 - \cos^2(\alpha, \delta)) = \delta^2 \sin^2(\alpha, \delta),$$

$$\text{(23.)} \qquad |\delta - (\alpha\delta)\alpha| = |\delta| \sin(\alpha, \delta).$$

Da $c_0 < 1$, $\arcsin c_0 < \frac{\pi}{2}$, also $\cos(\arcsin c_0) = p$ ein positiver Wert ist und für jedes Element δ aus Δ $(\alpha, \delta) \leqq \arcsin c_0$, $\cos(\alpha, \delta) \geqq p$, $\alpha\delta = |\delta| \cos(\alpha, \delta) \geqq p|\delta|$ wird, so folgt aus $\Sigma|\delta| = \infty$, daß auch

$$\text{(24.)} \qquad \Sigma\alpha\delta = \infty$$

wird. Ferner wird für jedes Element δ aus Δ_k $(\alpha, \delta) \leqq \arcsin c_k$, $\sin(\alpha, \delta) \leqq c_k$, also nach (23.) $|\delta - (\alpha\delta)\alpha| \leqq |\delta| c_k$, mithin, wenn Σ_k die Summation über die Elemente von Δ_k ausdrückt, $\Sigma_k|\delta - (\alpha\delta)\alpha| \leqq c_k \Sigma_k|\delta| \leqq 2c_k$ und, wenn s die Summe der konvergenten Reihe (21.) darstellt,

$$\text{(25.)} \qquad \Sigma|\delta - (\alpha\delta)\alpha| \leqq 2s.$$

Verstehen wir jetzt unter Δ auch die aus den Gliedern der Folge Δ gebildete Reihe und setzen wir $\Delta\alpha = D$, $\Delta - D\alpha = \mathsf{B}$, so ist D eine positive, zufolge (24.) divergente Reihe, während die Reihe B, wie (25.) zeigt, unbedingt konvergiert. Die Reihe $\Delta = D\alpha + \mathsf{B}$, deren Glieder ein Teilsystem von Γ bilden, ist also in Richtung α unbedingt entschieden divergent. — Wenn andererseits die Existenz eines solchen Teilsystems Δ vorausgesetzt wird, so folgt umgekehrt, daß α Hauptrichtung von Γ sein muß, weil ja alsdann nach Satz 4a. α (einzige) Hauptrichtung des Teilsystems Δ ist. — Wir bleiben bei unseren Voraussetzungen stehen und kommen noch einmal auf die Gleichung $\Delta = D\alpha + \mathsf{B}$ zurück. Da man die Glieder der positiven divergenten Reihe D offenbar auf zwei Reihen so verteilen kann, daß jede dieser Reihen divergiert, und da bei jeder Verteilung der Glieder der unbedingt konvergenten Reihe B auf zwei Reihen diese beiden

ebenfalls unbedingt konvergieren, so läßt sich das System Δ in zwei Teilsysteme Δ_1, Δ_2 so zerlegen, daß jede der beiden Reihen Δ_1, Δ_2 in Richtung α unbedingt entschieden divergiert. Es sei nun Δ_3 das System, welches zurückbleibt, wenn man aus Γ die Elemente von Δ fortläßt, Γ_1 das System, welches aus der Vereinigung von Δ_2 und Δ_3 hervorgeht. Da Δ_1 und Δ_2 dieselbe (einzige) Hauptrichtung α und dieselben Divergenzrichtungen (die Richtungen, welche mit α einen spitzen Winkel bilden) haben und Δ_2 Teil von Γ_1 ist, so ist α auch Hauptrichtung von Γ_1 und die Divergenzrichtungen von Δ_1 sind auch Divergenzrichtungen von Γ_1. Das zugrunde gelegte System Γ zerfällt in Γ_1 und Δ_1; eine Richtung δ ist daher dann aber auch nur dann Haupt- bzw. Divergenzrichtung von Γ, wenn sie wenigstens in einem der Systeme Γ_1, Δ_1 und mithin in Γ_1 als Haupt- bzw. Divergenzrichtung auftritt. — Wir fassen diese Resultate noch einmal zusammen:

5. *Die Richtung α ist dann und nur dann Hauptrichtung von Γ, wenn ein Teilsystem von Γ existiert, dessen Elemente die Glieder einer unbedingt entschieden in Richtung α divergenten Reihe bilden. Unter den Teilsystemen dieser Art gibt es dann stets solche, nach deren Weglassung aus Γ das zurückbleibende System Γ_1 noch immer dieselben Haupt- und Divergenzstrahlen wie Γ selbst besitzt.*

§ 25. Zweiter Beweis des Theorems *B* im Kapitel IV.

Wir können dieses Theorem so formulieren:

Wenn das abzählbare elementare System Γ nur Divergenzrichtungen besitzt, so läßt es sich zu einer konvergenten Reihe von beliebig vorgeschriebener Summe σ anordnen.

Für $n = 1$ ist das Theorem mit dem *Riemann*schen, die reellen Reihen betreffenden Satze erledigt. Den allgemeinen Satz beweisen wir jetzt mittels vollständiger Induktion. — Wir nehmen an, das System Γ erfülle die Voraussetzung unseres Satzes, und bezeichnen mit A das System der Hauptstrahlen. Hat A in Richtung δ eine Stützebene, so ist für jede Hauptrichtung α $\delta\alpha \leqq 0$, mithin $g(\delta) \geqq \frac{\pi}{2}$ (§ 24,2.). Da aber δ Divergenzrichtung ist, so kann $g(\delta)$ nicht $> \frac{\pi}{2}$ sein (§ 24,3.). Es

ist also $g(\delta) = \frac{\pi}{2}$, und es gibt somit wenigstens einen zu δ senkrechten Hauptstrahl, d. h. es liegt wenigstens ein Hauptstrahl in der Stützebene. Hiernach besitzt das abgeschlossene System A entweder keine, oder doch keine strahlenfreie Stützebene. Daraus folgt (§ 21,2.): A *ist relativ allseitig.* Es gibt daher m $(2 \leqq m \leqq n+1)$ Hauptstrahlen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}$, zwischen denen eine Gleichung

(26.) $$c_0\alpha_0 + c_1\alpha_1 + \cdots + c_{m-1}\alpha_{m-1} = 0 \qquad (c_0 > 0, \ldots c_{m-1} > 0)$$

mit positiven Koeffizienten c besteht (§ 21,1.). Die mehrmalige Anwendung des Satzes § 24,5. zeigt, daß man die Zahlenmenge Γ in $m+1$ Teilsysteme $\mathsf{A}_0, \mathsf{A}_1, \ldots \mathsf{A}_{m-1}, \Gamma_0$ so zerlegen kann, daß die Elemente eines jeden der Teilsysteme A_k $(k = 0, \ldots m-1)$ die Glieder einer Reihe sind, die unbedingt entschieden in Richtung α_k divergiert, während für Γ_0 jede Richtung Divergenzrichtung ist. Diese Reihen bezeichnen wir wieder mit $\mathsf{A}_0, \mathsf{A}_1, \ldots \mathsf{A}_{m-1}$. Da nach (26.) die Richtung $-\alpha_0$ aus den Richtungen $\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}$ mittels positiver Koeffizienten komponierbar ist, so können wir (§ 23, 2a.) aus den Reihen $\mathsf{A}_1, \ldots \mathsf{A}_{m-1}$ durch Ineinanderschieben eine Reihe B_0 erhalten, die in Richtung $-\alpha_0$ entschieden (wenn auch nicht unbedingt entschieden) divergiert. Hiernach erhalten wir für A_0 und B_0 zwei Gleichungen

(27.) $$\mathsf{A}_0 = A_0\alpha_0 + \Delta_1, \quad \mathsf{B}_0 = -B_0\alpha_0 + \Delta_2,$$

wo A_0 und B_0 entschieden nach $+\infty$ divergieren, Δ_1, Δ_2 konvergente Reihen sind, deren Summen δ_1 und δ_2 sein mögen. — Aus den Gliedern des Systems Γ_0 bilden wir, zunächst mit beliebiger Anordnung, eine Reihe Γ_0 und setzen

(28.) $$\Gamma_0\alpha_0 = C_0, \quad \Gamma_0 - C_0\alpha_0 = \Delta_3,$$

(29.) $$\sigma - \delta_1 - \delta_2 = \tau, \quad \tau\alpha_0 = t, \quad \tau - t\alpha_0 = \delta_3,$$

wobei σ die in dem Theorem bezeichnete Zahl bedeuten soll. Aus (28.), (29.) folgt $\Delta_3\alpha_0 = \Gamma_0\alpha_0 - C_0 = 0$, $\delta_3\alpha_0 = \tau\alpha_0 - t = 0$; und dies besagt, daß δ_3 und die Elemente von Δ_3 dem durch die Gleichung $\alpha_0\xi = 0$ definierten Modul M, also einem Zahlsystem angehören, auf welches die Gesetze komplexer Zahlen mit $n-1$ Einheiten Anwendung finden. Für jede Zahl $\xi \neq 0$ dieses Moduls wird aber $\Delta_3\xi = \Gamma_0\xi - C_0\alpha_0\xi = \Gamma_0\xi$. Da nun das System Γ_0 nur Divergenzrichtungen besitzt, so bilden in $\Delta_3\xi = \Gamma_0\xi$ die positiven (wie auch die negativen) Glieder eine divergente Reihe. Dies zeigt, daß für das zu M gehörige System Δ_3 jede Richtung des Moduls M Divergenz-

richtung ist. Da das System Δ_3 überdies elementar ist und unser Theorem für den Fall $n-1$ als bewiesen gilt, so folgt, daß wir die Reihe Δ_3 so anordnen können, daß sie konvergiert und ihre Summe ein innerhalb des Moduls M willkürlich vorgeschriebener Wert ist. Nun können wir jede Anordnung von Δ_3 durch entsprechende Anordnung von Γ_0 erreichen, und diese denken wir uns jetzt so ausgeführt, daß die Reihe Δ_3 nach dem Werte δ_3 konvergiert. Die Glieder der drei Reihen A_0, B_0 und

$$\Gamma_0 = C_0\alpha_0 + \Delta_3$$

konstituieren das System Γ. Nach § 23,1. können wir durch Ineinanderschieben der drei Reihen A_0, B_0, C_0 eine konvergente Reihe mit beliebig vorgeschriebener Summe s erhalten; durch Ineinanderschieben der drei Reihen Δ_1, Δ_2, Δ_3 erhält man stets eine konvergente Reihe von der Summe $\delta_1+\delta_2+\delta_3$. Aus A_0, B_0, Γ_0 kann man also durch Ineinanderschieben eine konvergente Reihe von der Summe $s\alpha_0+\delta_1+\delta_2+\delta_3$ erhalten, wo s beliebig ist. Nimmt man für s den in (29.) erklärten Wert t, so erhält man $t\alpha_0+\delta_1+\delta_2+\delta_3=\sigma$. — Damit ist das Theorem bewiesen.

Es ist bereits in der Einleitung erwähnt worden, daß für den Fall $n=2$ eine Bearbeitung des Reihenproblems von *P. Lévy* vorliegt. Hier mögen nun die Resultate dieser Arbeit im einzelnen dargelegt werden. Der Verfasser geht von einer Reihe Γ aus, von der nur vorausgesetzt wird, daß ihre Glieder nach 0 konvergieren, und zeigt zunächst, daß in dem speziellen Falle, wo sich diese Reihe in drei Teilreihen von der Form $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ zerlegen läßt, wo A, B, C positive divergente Reihen, α, β, γ drei ein allseitiges System bildende Strahlen bezeichnen, durch Ineinanderschieben dieser Reihen eine konvergente Reihe von beliebig vorgeschriebener Summe erhalten werden kann*). Eine spätere Bemerkung zeigt, daß dasselbe gilt, wenn die drei Teilreihen die allgemeinere Form $A\alpha+\Delta_1$, $B\beta+\Delta_2$, $C\gamma+\Delta_3$ haben, wo $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ konvergieren. Auf diesen Fall soll der allgemeine zurückgeführt werden. Zu diesem Zweck wird der Begriff der Hauptrichtung (point d'indétermination) eingeführt. Es wird bemerkt, daß, abgesehen von dem Falle der unbedingten Konvergenz, Hauptstrahlen existieren müssen, daß sie ein abgeschlossenes System bilden,

*) Die Terminologie ist bei *Lévy* eine ganz andere. Wir haben oben alles in unsere Ausdrucksweise übersetzt.

und daß, wenn Konvergenz möglich sein soll, die Hauptstrahlen nicht sämtlich innerhalb eines Winkels $< \pi$ liegen können (woraus man übrigens sogleich entnehmen kann, daß unter den Hauptstrahlen ein Gegenpaar oder ein allseitiges Tripel vorkommen muß). Es wird ferner gezeigt, daß, wenn das in einem Winkel $w < \pi$ gelegene Teilsystem von Γ zwei Hauptstrahlen α, β besitzt, dieses Teilsystem zu einer Reihe von der Form $C\gamma + \Delta$ angeordnet werden kann, wo γ eine beliebige von α und β verschiedene Richtung zwischen α und β, C eine positive divergente, Δ eine konvergente Reihe bezeichnet. Wenn weiterhin gesagt wird: „En général on pourra diviser le circle en trois arcs et opérer la même réduction, en choisissant les trois directions O_x, O_y, O_z comme il a été dit plus haut. On sera alors ramené au cas particulier déjà étudié", so ist offenbar der gewöhnliche Fall gemeint, daß unter den Hauptstrahlen ein allseitiges Tripel α, β, γ vorkommt. Der Teilung der Ebene in die drei Winkelgebiete (β, γ), (γ, α), (α, β) entspricht dann eine Zerfällung von Γ in drei Teilsysteme A_0, B_0, Γ_0, wobei die auf den Strahlen α, β, γ gelegenen Zahlen zunächst nach Belieben dem einen oder andern angrenzenden Gebiete zugerechnet werden mögen. Ist jeder der Strahlen α, β, γ Hauptstrahl für jedes der in den beiden angrenzenden Gebieten gelegenen Teilsysteme, so lassen sich diese nach dem vorher bewiesenen Satze in der Form

$$\mathsf{A}_0 = -A\alpha + \Delta_1, \quad \mathsf{B}_0 = -B\beta + \Delta_2, \quad \Gamma = -C\gamma + \Delta_3$$

darstellen, und die in der zitierten Stelle ausgesprochene Behauptung trifft also zu. Ist beispielsweise γ nur Häufungsstrahl für A_0 nicht für B_0, so kann man zwar nicht unmittelbar so verfahren, aber eine geringfügige Modifikation führt auch hier zum Ziele. Ist nämlich γ' ein Strahl zwischen β und γ, der mit γ einen kleinen Winkel $(< \pi - (\alpha, \gamma))$ bildet, so kann man die zwischen γ und γ' gelegenen Zahlen von A_0 so in zwei Teilsysteme T_1, T_2 verteilen, daß in jedem von ihnen die Summe der absoluten Werte unendlich groß wird. Wenn man nun das eine dieser Systeme, etwa T_1 aus A_0 fortnimmt und B_0 überweist, so wird jedes der beiden Systeme A_0, B_0 zwischen γ und γ' einen Hauptstrahl haben. Eventuell hat man bei α und β dasselbe Austauschverfahren vorzunehmen. Dann kann man mit A_0, B_0, Γ_0 wie im ersten Falle verfahren.

Der Fall, daß als Hauptstrahlen zwei Gegenpaare auftreten, wird nicht erwähnt; er läßt sich aber ganz ähnlich behandeln. Für den Fall, daß

zwei Gegenstrahlen als Hauptstrahlen auftreten und (wenigstens) die eine der von ihnen begrenzten Halbebenen keinen weiteren Hauptstrahl enthält, wird ein Satz bewiesen, der aber zur Erledigung dieses Falles nicht ausreicht*). Hier gelangt man zum Ziel, wenn man noch den Satz 5. des vorigen Paragraphen benutzt. Dieser Satz dient auch bei der Behandlung des allgemeinen Problems hauptsächlich zur Erledigung der Fälle, wo die Hauptstrahlen kein allseitiges System bilden.

Was die in § 23 abgeleiteten Reihensätze anbelangt, so macht es keinen wesentlichen Unterschied, ob man den Fall $n = 2$ oder den allgemeinen behandelt. Anders aber steht es mit den Sätzen, die sich auf das System der Hauptstrahlen beziehen. Vor allem kommt es darauf an, dieses System als relativ allseitig nachzuweisen, und dazu war außer den Sätzen des vorigen Paragraphen noch insbesondere die Herbeiziehung des Satzes 2. aus § 21 notwendig. Das Fehlen der auf das System der Hauptstrahlen bezüglichen Sätze in der *Lévy*schen Arbeit ist der Hauptgrund, weswegen ich den allgemeinen Fall dort nicht als erledigt ansehe und auch noch lange nicht als erledigt ansehen würde, wenn die Behandlung des Falles $n = 2$ lückenlos durchgeführt wäre.

*) Auch in einer neuen, noch nicht gedruckten Arbeit von *W. Threlfall*, die mir im März dieses Jahres (1913) vorgelegen hat, wird das Problem im Gebiete der gewöhnlichen komplexen Zahlen bis auf diesen Fall richtig behandelt. In ganz besonders einfacher Weise wird im ersten Teil der Arbeit gezeigt, daß jede bedingt konvergente Reihe zu einer konvergenten Reihe mit anderer Summe umgeordnet werden kann.

(Schluß folgt.)

On *Gibbs*'s Phenomenon.

By *Maxime Bôcher* in Cambridge (Mass.).

In a letter to the English journal *Nature* in 1899 (vol. 59, p. 606) *J. Willard Gibbs* made a remarkable observation concerning the way in which the *Fourier*'s series*)

$$(1.) \qquad \Psi(x) = \sin x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \cdots$$

behaves near the points of discontinuity of $\Psi(x)$. His statement, while remarkably lucid and precise, so far as it goes, is extreemly brief, touches on only the central aspects of the question, and contains nothing in the way of proof. So far as I know, this observation of *Gibbs* remained absolutely unnoticed except by some of his immediate colleagues at New Haven, one of whom, Professor *E. B. Wilson*, called it to my attention a few years later. Its high degree of interest was at once apparent to me, and I saw, what had doubtless been obvious to others, that it applied to the *Fourier*'s development of a large class of other discontinuous functions. Consequently, in a monograph on *Fourier*'s series which I wrote soon after**) I devoted a section to a detailed discussion of the peculiar conditions in question, to which I gave the name of *Gibbs*'s phenomenon. This exposition and development brought the matter to the attention of other mathematicians, and is, I believe, the direct or indirect source from which all further work on the subject flowed***).

In accordance with the didactic purpose of the article, I did not

*) To be exact, it is the function $\Psi(\pi - x)$ which *Gibbs* considers.

**) Annals of Mathematics, 2nd series, vol. 7 (1906) p. 81—152; also printed separately by Harvard University.

***) Reference should also be made to *Runge*'s *Theorie und Praxis der Reihen*, pp. 77—80 where a certain other special *Fourier*'s series is discussed in a similar way, but where there is no indication that the phenomenon is one of frequent occurrence and of importance, — the whole matter appears in the light of an illustrative example. This book was published five years after *Gibbs*'s remark and almost two years before my article, but it did not become known to me until my article was in type.

think it desirable to formulate any very broad conditions for the class of functions whose *Fourier*'s developments exhibit this phenomenon*); and it seemed to me the less necessary to do so because any mature mathematician on reading my treatment could not fail to observe its degree of generality. The fact is simply that the results established for the series (1.) may be extended at once to the *Fourier*'s development of the function $\frac{D}{\pi}\Psi(x-\alpha)$ which has at the point $x=\alpha$ a jump of magnitude D. If, by subtracting this function from a function $f(x)$ which also has a jump of magnitude D at α, we get a function whose *Fourier*'s development converges uniformly throughout the neighborhood of α, it is clear that all the facts apply, without essential change, to the *Fourier*'s development of $f(x)$. This is, in substance, the method I used, and from it we may infer that *Gibbs's phenomenon is valid for every real function, $f(x)$, with a discontinuity at α, provided it is possible by adding to $f(x)$ on one side or the other of α a suitable constant to form another function whose Fourier's development converges uniformly throughout the neighborhood of α.*

Corresponding to every class of functions for which we can assert the uniform convergence of the *Fourier*'s series in the neighborhood of α, we thus have a class of discontinuities for which we can assert the validity of *Gibbs*'s phenomenon. The case I mentioned explicitly is one such case; a case recently mentioned by *Gronwall***), namely that in which

---

*) I did not, however, assume that the derivative of the function satisfies *Dirichlet*'s conditions as is erroneously stated by *Gronwall* in an article presently to be cited. Indeed the class of functions with which I was explicitly concerned do not even themselves necessarily satisfy *Dirichlet*'s conditions.

**) Über die *Gibbs*'sche Erscheinung, Math. Ann. vol. 72, (1912) p. 228. *Gronwall*'s reference to my article (foot-note p. 234) is such as to make it appear that his method of treatment is different from and more general than mine. This is not the case; the two methods have the same degree of generality and are not essentially different. The main difference is that in treating series (1.) I considered the points

$$\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}, \frac{2\pi}{n+\frac{1}{2}}, \frac{3\pi}{n+\frac{1}{2}}, \cdots$$

where the remainder of the series is a maximum or a minimum, while *Gronwall* considers the points

$$\frac{\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n+1}, \frac{4\pi}{n}, \cdots$$

where the sum of the first n terms is a maximum or a minimum. It is at once

$f(x)$ satisfies *Dirichlet*'s conditions, is another. Neither of these cases includes the other, nor can either be regarded as more than a very special illustrative example.

If the conditions just stated are satisfied, $f(x)$ approaches definite limits, $f(\alpha+0)$ and $f(\alpha-0)$, as x approaches α from above or below. The difference

$$D = f(\alpha+0) - f(\alpha-0)$$

we call the magnitude of the jump at α. I now reproduce verbatim the statement of *Gibbs*'s phenomenon from my article already cited (p. 131) in which the peculiarities are brought out not only with much greater generality, but also with much greater detail than had been done by *Gibbs*.

If $S_n(x)$ denotes the sum of the first $n+1$ terms of the Fourier's expansion of $f(x)$, the curve $y = S_n(x)$ will, for large values of n, pass in almost a vertical direction through a point whose abscissa is α and whose ordinate is almost equal to $\frac{1}{2}[f(\alpha+0)+f(\alpha-0)]$. The curve then rises and falls abruptly on the two sides of this point to the neighborhood of the curve $y=f(x)$, and oscillates about this curve lying alternately above and below it. The highest (or lowest) point of the kth waves to the right and left of α will, for large values of n, lie approximately at the points

$$\alpha \pm \frac{2k\pi}{2n+1}$$

and the height of these waves will be approximately $\frac{DP_k}{\pi}$.

Here (cf. formula (54.))

---

clear, when we consider the shapes of the arches of the approximation curves, that for large values of n the difference between the ordinates of the curve at these points is extremely small, and that this difference is quite immaterial to the work in hand. There can at most be a question of a minute simplification of the formal work. In making this comparison it should be further noticed that *Gronwall* establishes only a part of *Gibbs*'s phenomenon.

Gronwall does, it is true, give various results for the series (1.) which I had not given, but some of which had heen published several months earlier by *Dunham Jackson*, Rendiconti di Palermo, vol. 32, (1911) p. 257. These results are of such a character as to be essentially restricted to the special series (1.) and to be without importance for *Gibbs*'s phenomenon in general.

$$P_k = \frac{\pi}{2} - \int_0^{k\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Ample determination and discussion of the numerical values of these constants is also given; for instance the fact that the height of the first wave is approximately $9^0/_0$ of the magnitude of the jump.

Within the last year articles have appeared which contain, along with some other material, methods and results concerning *Gibbs*'s phenomenon which differ so slightly from those of my paper, or are such obvious corollaries of it, that I cannot let them pass without mention. For instance, a part of the theorem last stated, when written as a formula, would read:

$$\lim_{n=\infty} S_n\left(\alpha \pm \frac{2k\pi}{2n+1}\right) = f(\alpha \pm 0) \mp \frac{DP_k}{\pi}.$$

By subtracting these two formulas from one another, we find

$$(2.) \quad D = \frac{\pi}{\pi - 2P_k} \lim_{n=\infty} \left[S_n\left(\alpha + \frac{2k\pi}{2n+1}\right) - S_n\left(\alpha - \frac{2k\pi}{2n+1}\right)\right],$$

k being any fixed positive integer. In a recent number of this journal*) *Fejér* enunciates and solves by various methods the problem: To express the magnitude of the jump D in terms of the *Fourier*'s series. The formula just given solves this problem by such an immediate and obvious step that this answer to *Fejér*'s question may be regarded as merely a corollary of my statement of *Gibbs*'s phenomenon.

The formula used by *Fejér* for answering his question is a little different from that just given but it also flows with the greatest ease from a formula established in my paper. This I will now show, deducing at once a more general formula which includes *Fejér*'s result, and formula (2.) above, as special cases.

The remainder of series (1.) after the nth term is written in my paper (formula (51.) page 125) in the form

$$(3.) \qquad R_n(x) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{(n+\frac{1}{2})x} \frac{\sin x}{x} dx + I_n(x),$$

and it is proved (page 126) that $I_n(x)$ approaches zero uniformly when $0 < x < b$, $b < 2\pi$ as n becomes infinite. Now let us write

*) Bd. 142 (1913), S. 165.

$$F(x) = \int_x^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

and select a set of positive constants $q_1, q_2, \ldots$ such that $\lim_{n=\infty} q_n = \infty$, and

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{n}{q_n}\right) = c, \tag{4.}$$

where c is some positive constant or $+\infty$. We then have

$$\lim_{n=\infty} F\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{q_n}\right) = F(c).$$

Consequently, since (3.) may be written

$$R_n(x) = F((n+\tfrac{1}{2})\,x) + I_n(x),$$

we find

$$\lim_{n=\infty} R_n\left(\frac{1}{q_n}\right) = F(c).$$

If now, we use the method of my paper as indicated above for passing from the special series (1.) to the *Fourier*'s development of a function $f(x)$ with a jump of magnitude D at α and satisfying the condition above stated for *Gibbs*'s phenomenon, we infer at once, $S_n(x)$ denoting the sum of the first $n+1$ terms of this development,

$$\lim_{n=\infty} S_n\left(\alpha \pm \frac{1}{q_n}\right) = f(\alpha \pm 0) \mp \frac{D}{\pi} F(c).$$

Subtracting these equations from one another, we find

$$D = \frac{\pi}{\pi - 2F(c)} \lim_{n=\infty} \left[S_n\left(\alpha + \frac{1}{q_n}\right) - S_n\left(\alpha - \frac{1}{q_n}\right)\right]. \tag{5.}$$

This is the general formula referred to above. I mention the following special cases:

(a.) $q_n = \dfrac{2n+1}{2k\pi}$, k a positive integer. Here $c = k\pi$ and (5.) reduces to (2.).

(b.) $q_n = \dfrac{n}{k\pi}$, k a positive integer. Here again $c = k\pi$ and (5.) reduces to a form very similar to (2.) but corresponding more nearly to *Gronwall*'s manner of approaching *Gibbs*'s phenomenon. Cf. the foot-note on page 42.

(c.) $q_n = n^p$, $0 < p < 1$. Here $c = +\infty$, $F(c) = 0$, and (5.) takes the very simple form

$$D = \lim_{n=\infty} [S_n(\alpha + n^{-p}) - S_n(\alpha - n^{-p})].$$

(d.) $q_n = \frac{n}{g}$, g any root of $F(x) = 0$. Here $c = g$, and (5.) reduces to *Fejér*'s formula (21.).

If we write out the sums $S_n\left(\alpha \pm \frac{1}{q_n}\right)$ and apply the addition theorems for the sine and cosine, as was done by *Fejér* in the special case last mentioned, we find at once

$$(6.) \qquad D = \frac{2\pi}{\pi - 2F(c)} \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu \cos \nu\alpha - a_\nu \sin \nu\alpha) \sin \frac{\nu}{q_n},$$

where we suppose the *Fourier*'s development of $f(x)$ to have been

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x).$$

Corresponding to the four cases (a.)—(d.) just mentioned, we have four special cases of (6.), the last of which is the formula given by *Fejér* at the bottom of page 183.

In the last section of his paper, *Fejér* obtains an additional piece of information, not contained in my statement of *Gibbs*'s phenomenon, as to the nature of the convergence of a *Fourier*'s series near a finite jump*). It is true that, for this purpose, the function must be subjected to additional restrictions. The following method of looking at this question is perhaps not without interest:

In the case of the series (1.), the derivative of the sum of the first n terms, when $x = 0$, is obviously equal to n. Consequently, the derivative of the sum of the first n terms of the *Fourier*'s development of $\frac{D}{\pi} \Psi(x - \alpha)$ has, when $x = \alpha$, the value $\frac{nD}{\pi}$. If the function $f(x)$ has a finite jump of magnitude D at α, we consider the *Fourier*'s development of

$$(7.) \qquad f(x) - \frac{D}{\pi} \Psi(x - \alpha).$$

---

*) *Fejér* regards this result as giving another expression for the magnitude of the jump. To me it seems of greater interest to regard it as giving an asymptotic expression for the steepness of the approximation curves at the point where the jump occurs.

I pass over without discussion other parts of *Fejér*'s paper which have no close relation to my work on *Gibbs*'s phenomenon. To avoid misunderstanding, I add explicitly that I have not, in what precedes, referred in any way to the *methods* used by *Fejér*, but merely to his *results*.

If the derivative of the sum of its first $n+1$ terms, at the point $x=\alpha$, remains finite as n becomes infinite, or at any rate always remains small enough so that when divided by n it approaches zero as its limit, it is clear that

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{S_n'(\alpha)}{n}\right)=\frac{D}{\pi} \tag{8.}$$

where S_n' denotes the derivative of the sum of the first $n+1$ terms of the *Fourier*'s development of $f(x)$. It is this relation (8.) which constitutes *Fejér*'s result. The condition just enunciated for its validity is obviously both a necessary and a sufficient one. Another sufficient condition, more serviceable for some purposes, may be obtained by means of the following observation:

If S_n denote the sum of the first $n+1$ terms of any series, and σ_n the arithmetic mean of $S_0, S_1, \ldots S_n$, then

$$\frac{S_n}{n}=\frac{n+1}{n}\sigma_n-\sigma_{n-1}.$$

Consequently, if σ_n approaches a finite limit as n becomes infinite, $\lim_{n=\infty}\frac{S_n}{n}=0$. Hence

If the series obtained by differentiating term by term the Fourier's development of the function) (7.) is summable, when $x=\alpha$, by the method of the first arithmetic mean, then Fejér's result,* (8.), *is valid.*

Various conditions on the function $f(x)$ may readily be specified which are sufficient to secure this summability.

---

*) (7.) may obviously be replaced here by any function obtained by subtracting from $f(x)$ a function with period 2π which, in any finite interval, consists of a finite number of a analytic pieces and which has a finite jump of magnitude D at α. The analytic pieces just mentioned are supposed to be analytic at the ends of their intervals of definition as well as within these intervals.

Über konjugierte trigonometrische Reihen.

Von Herrn *Leopold Fejér* in Budapest.

1. Es sei

$$a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta) \tag{1.}$$

eine beliebige trigonometrische Reihe der reellen Variabeln θ mit reellen Koeffizienten.

Die trigonometrische Reihe

$$c + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-b_\nu \cos \nu\theta + a_\nu \sin \nu\theta) \tag{2.}$$

heißt die *konjugierte* trigonometrische Reihe der Reihe (1.). Hier bedeutet c eine willkürliche reelle Konstante. Die konjugierte Reihe der Reihe (2.) ist (von einer additiven reellen Konstante abgesehen), gleich der Reihe (1.), mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen.

Die Reihe (1.) ist die „reelle Komponente" der Potenzreihe

$$a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu - ib_\nu)\, z^\nu \tag{3.}$$

für $z = e^{i\theta}$. Die zu (1.) konjugierte Reihe (2.) ist (von einer additiven reellen Konstante abgesehen) die „imaginäre Komponente" derselben Potenzreihe*).

*) Zur neuerlichen Beschäftigung mit konjugierten trigonometrischen Reihen haben mich gewisse Untersuchungen geführt, die ich in einem Teile meiner Arbeit „Über die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer *Fourier*reihe" (dieses Journal, Bd. 142 (1913), pag. 165–188), veröffentlicht habe. — [Einige Resultate des anderen Teiles meiner Arbeit, deren Problem schon durch den eben angeführten Titel ziemlich klar hervortritt, hat, nach der Publikation meiner Arbeit, auch Herr *M. Bôcher* aus den Formeln seiner Arbeit vom Jahre 1906, die in Nr. 9 *Gibbs*sche Ideen

2. Ich betrachte die Partialsummen der Reihe (1.) und ihre arithmetischen Mittel, weiter die Partialsummen ihrer konjugierten Reihe (2.) und ihre arithmetischen Mittel. Es bezeichne also

$$(4.) \qquad s_n(\theta) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta),$$

$$(5.) \qquad S_n(\theta) = \frac{s_0(\theta) + s_1(\theta) + \cdots + s_n(\theta)}{n+1};$$

$$(6.) \qquad \sigma_n(\theta) = c + \sum_{\nu=1}^{n} (-b_\nu \cos \nu\theta + a_\nu \sin \nu\theta),$$

$$(7.) \qquad \Sigma_n(\theta) = \frac{\sigma_0(\theta) + \sigma_1(\theta) + \cdots + \sigma_n(\theta)}{n+1}.$$

Die trigonometrischen Polynome $s_n(\theta)$, $S_n(\theta)$, $\sigma_n(\theta)$, $\Sigma_n(\theta)$ sind durch zwei Relationen verbunden, die ich zunächst ableiten will.

Es sei

$$d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_n + \cdots$$

eine beliebige unendliche Reihe und

$$(8.) \qquad \delta_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_n,$$

$$(9.) \qquad \Delta_n = \frac{\delta_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_n}{n+1}.$$

Dann ist

$$(10.) \qquad \Delta_n = \delta_n - \frac{d_1 + 2\,d_2 + \cdots + n\,d_n}{n+1}.$$

Mit Rücksicht auf (10.) ist nun

$$S_n(\theta) = s_n(\theta) - \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \nu(a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta)}{n+1}.$$

Aber

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu(a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta) = \Big[\sum_{\nu=1}^{n} (-b_\nu \cos \nu\theta + a_\nu \sin \nu\theta)\Big]' = \sigma_n'(\theta),$$

also ist

$$(11.) \qquad S_n(\theta) = s_n(\theta) - \frac{\sigma_n'(\theta)}{n+1},$$

und ähnlich erhält man

---

weiterentwickelt, herleiten können — wie ich es aus den Korrekturen ersehe, die mir die Redaktion dieses Journals gütigst zugeschickt hatte. Mit Freude konnte ich da konstatieren, daß, *nach* den Publikationen von Herrn *T. H. Gronwall* (1912) und von mir (1913), gewisse Fragen heute wirklich mit der größten Leichtigkeit behandelt werden können, von welchen indessen im Jahre 1906 jede Spur einer Andeutung fehlte.]

$$(12.) \qquad \Sigma_n(\theta) = \sigma_n(\theta) + \frac{s'_n(\theta)}{n+1}.$$

3. Ich beabsichtige hier nicht alle Konsequenzen dieser einfachen, aber wichtigen Relationen (11.) und (12.) zu entwickeln. Ich beschränke mich in diesen Zeilen vielmehr darauf, auf Grund der Relationen (11.) und (12.) die folgende Frage zu behandeln:

Die trigonometrische Reihe (1.) *sei im Intervalle* $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ *gleichmäßig konvergent; was kann ich daraus über die Konvergenzverhältnisse der konjugierten*) Reihe* (2.) *schließen?*

4. *Theorem* I. *Die trigonometrische Reihe* (1.) *sei im Intervalle* $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ *gleichmäßig konvergent; dann konvergiert für ihre konjugierte Reihe* (2.) *die Differenz zwischen der n-ten Partialsumme und dem n-ten arithmetischen Mittel mit unendlich wachsendem n gegen Null, und zwar gleichmäßig im Intervalle* $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$. *D. h. es ist*

$$(13.) \qquad \lim_{n=\infty} [\Sigma_n(\theta) - \sigma_n(\theta)] = 0,$$

und zwar gleichmäßig im Intervalle $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$.

Der Beweis dieses Theorems stützt sich einerseits auf die Relation (12.), andererseits wesentlich auf einen sehr wichtigen Satz des Herrn *Serge Bernstein.*

Der betreffende Satz des Herrn *S. Bernstein* lautet folgendermaßen**):

Es sei

$$\varphi(\theta) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos\theta + \mu_1 \sin\theta + \cdots + \lambda_p \cos p\theta + \mu_p \sin p\theta$$

---

*) Über die Abhängigkeit der Konvergenz und Divergenz der konjugierten Reihe von der „Randfunktion" der Ursprünglichen, hat Herr *A. Pringsheim* wichtige Resultate erhalten. Ich verweise auf § 4 seiner Abhandlung: „Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise", Sitzungsber. d. Bayr. Akad., math.-phys. Kl., München 1900.

**) S. *Serge Bernstein:* „Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné" (Mémoire couronné par la Classe des sciences de l'Académie Royale de Belgique, 1912), pag. 19, 20. Herr *Bernstein* beweist, daß $|\varphi'(\theta)| \leqq 2pM$; aber es ist leicht auf Grund seiner Resultate, die sich auf das reine Sinuspolynom beziehen, zu beweisen, daß auch $|\varphi'(\theta)| \leqq pM$ gültig ist. — Ich erwähne noch, daß Herr *M. Fekete* nächstens für die trigonometrischen Polynome einen neuen Beweis der *Bernstein*schen Ungleichung $|\varphi'(\theta)| <$ const. pM veröffentlichen wird.

ein beliebiges trigonometrisches Polynom mit reellen Koeffizienten und von höchstens p-ter Ordnung. Wenn dann

$$(14.) \qquad |\varphi(\theta)| \leqq M \quad \text{für} \quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,$$

so ist

$$(15.) \qquad \left|\frac{d\varphi}{d\theta}\right| = |\varphi'(\theta)| \leqq pM.$$

Es sei nun ε eine beliebige (aber fixe) positive Größe. Zu ihr läßt sich dann, nach Voraussetzung, eine positive ganze Zahl m finden, so daß

$$(16.) \qquad |s_n(\theta) - s_m(\theta)| \leqq \varepsilon, \quad \text{wenn} \quad n \geqq m, \; 0 \leqq \theta \leqq 2\pi.$$

Nach der Relation (12.) ist nun

$$\Sigma_n(\theta) - \sigma_n(\theta) = \frac{s_n'(\theta)}{n+1} = \frac{\{s_m(\theta) + [s_n(\theta) - s_m(\theta)]\}'}{n+1} = \frac{s_m'(\theta)}{n+1} + \frac{[s_n(\theta) - s_m(\theta)]'}{n+1},$$

also

$$|\Sigma_n(\theta) - \sigma_n(\theta)| \leqq \frac{|s_m'(\theta)|}{n+1} + \frac{|[s_n(\theta) - s_m(\theta)]'|}{n+1}.$$

Nun ist einerseits gewiß

$$\frac{|s_m'(\theta)|}{n+1} \leqq \varepsilon \qquad \text{für} \qquad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,$$

wenn nur n gehörig groß ist.

Andererseits ist, wenn $n \geqq m$, $s_n(\theta) - s_m(\theta)$ ein trigonometrisches Polynom von höchstens n-ter Ordnung, welches, nach (16.), dem absoluten Betrage nach $\leqq \varepsilon$ ist, wenn $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$. Also ist, infolge der *S. Bernstein*schen Ungleichung (15.),

$$|[s_n(\theta) - s_m(\theta)]'| \leqq n\varepsilon, \quad (n \geqq m),$$

und ich erhalte

$$|\Sigma_n(\theta) - \sigma_n(\theta)| < 2\varepsilon, \quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,$$

wenn nur n gehörig groß ist. D. h. $\Sigma_n(\theta) - \sigma_n(\theta)$ konvergiert für $\lim n = \infty$ gleichmäßig gegen Null im Intervalle $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, w. z. b. w.

5. Aus Theorem I folgt

Theorem II. *Ist die trigonometrische Reihe* (1.) *im Intervalle* $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ *gleichmäßig konvergent, so ist die konjugierte Reihe* (2.) *an allen Stellen konvergent, wo sie* (*die Reihe* (2.)) *summabel ist.*

Existiert nämlich für eine Stelle θ der Grenzwert $\lim_{n=\infty} \Sigma_n(\theta)$, so existiert, infolge der Gleichung (13.), auch der Grenzwert $\lim_{n=\infty} \sigma_n(\theta)$, und es ist

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n(\theta) = \lim_{n=\infty} \Sigma_n(\theta).$$

(Ich bemerke, daß aus dem Umstande *allein*, daß die Reihe

$$a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta)$$

für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ gleichmäßig konvergiert, *nicht* etwa schon folgt, daß die konjugierte Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-b_\nu \cos \nu\theta + a_\nu \sin \nu\theta)$$

für eine Stelle θ konvergiert. Denn z. B. ist die Reihe*)

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\sin \nu\theta}{\nu \log \nu}$$

für $0 < \theta < 2\pi$ gleichmäßig konvergent. Ihre konjugierte Reihe

$$-\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\cos \nu\theta}{\nu \log \nu}$$

ist aber an der Stelle $\theta = 0$ (eigentlich) divergent.]

Aus Theorem I folgt weiter das

Theorem III. *Ist die Reihe* (1.) *für* $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ *gleichmäßig konvergent, so ist die konjugierte Reihe* (2.) *für eine Punktmenge des Intervalles* $(0, 2\pi)$ *gleichmäßig konvergent, wenn sie* (*die Reihe* (2.)) *für dieselbe Punktmenge gleichmäßig summabel ist.*

Ist also speziell die konjugierte Reihe im ganzen Intervalle $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ *gleichmäßig summabel, so ist sie auch ebenda gleichmäßig konvergent.*

6. Ich will das Theorem III auf den einfachsten Spezialfall anwenden, wo nicht nur die Reihe (1.), sondern auch die konjugierte Reihe (2.) die *Fourier*sche Reihe einer überall stetigen (nach 2π periodischen) Funktion von θ ist.

Ich betrachte also jetzt eine Potenzreihe (mit reellen oder komplexen Koeffizienten)

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots,$$

die für $|z| < 1$ konvergent ist, und im abgeschlossenen Kreisbereiche $|z| \leqq 1$ stetig ist, und behaupte:

Theorem IV. *Ist die Potenzreihe*

(17.) $$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

---

*) S. meine Arbeit: „Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze", Sitzungsber. d. Bayr. Akad., math.-phys. Kl., München 1910, § 2.

für $|z|<1$ *konvergent, und ist ihre Summe für* $|z|<1$ *stetig für* $|z|\leqq 1$, *so folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz ihrer reellen Komponente für* $|z|=1$ *die gleichmäßige Konvergenz ihrer imaginären Komponente für* $|z|=1$, (*und umgekehrt*).

Beweis: Die imaginäre Komponente ist in diesem Falle die *Fourier*-reihe einer überall stetigen (nach 2π periodischen) Funktion. Eine solche *Fourier*reihe ist aber*) für $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ *gleichmäßig summabel.* Also ist sie auch, mit Rücksicht auf Theorem III, *gleichmäßig konvergent* für $0\leqq\theta\leqq 2\pi$, w. z. b. w.

Zu Theorem IV bemerke ich folgendes:

Ist die *eine* Komponente der für $|z|<1$ konvergenten und für $|z|\leqq 1$ stetigen Potenzreihe

$$c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n+\cdots$$

für $|z|=1$ zwar konvergent, jedoch *nicht gleichmäßig* konvergent, so kann die *andere* Komponente schon *ungleimäßig konvergent*, ja *divergent* sein.

Das ist der Fall in jenem Beispiele, welches ich im § 4 (Gl. (29.)) meiner Arbeit: „Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze“ (Münchener Berichte, 8. Januar 1910) veröffentlicht habe**). Die dort definierte Potenzreihe mit numerischen (reellen) Koeffizienten

$$F(z)=\gamma_0+\gamma_1z+\cdots+\gamma_nz^n+\cdots \tag{18.}$$

hat in der Tat folgende Eigenschaften***):

1) Sie ist für $|z|<1$ konvergent.
2) Ihre Summe $F(z)$ für $|z|<1$ ist für $|z|\leqq 1$ stetig.
3) Ihre imaginäre Komponente für $|z|=1$:

$$\gamma_1\sin\theta+\gamma_2\sin 2\theta+\cdots+\gamma_n\sin n\theta+\cdots \tag{19.}$$

ist zwar für jedes reelle θ konvergent, jedoch

4) nicht gleichmäßig konvergent im Intervalle $0\leqq\theta\leqq 2\pi$. (D. h. sie hat die *Lebesgue*sche Singularität).
5) Ihre reelle Komponente für $|z|=1$:

$$\gamma_1\cos\theta+\gamma_2\cos 2\theta+\cdots+\gamma_n\cos n\theta+\cdots \tag{20.}$$

---

*) S. meine Arbeit in Math. Annalen Bd. 58.

**) S. auch Herrn *de la Vallée-Poussin*'s „Cours d'Analyse Infinitésimale“, deuxième édition, tome II, chapitre IV, no. 159.

***) S. meine Arbeit: „Sur les singularités de la série de *Fourier* des fonctions continues“, Annales de l'École Normale (3) 28 (1911) und *de la Vallée-Poussin*, loc. cit.

ist für $\theta = 0$ divergent. (D. h. sie hat die *du Bois-Reymond*sche Singularität).

Diese Potenzreihe (18.) liefert also das gewünschte Beispiel.

7. In meiner Arbeit „Sur les singularités etc." habe ich die Eigenschaften 1), 2), 3), 4), 5) der Potenzreihe (18.) einzeln bewiesen. Es erschien zunächst als ein merkwürdiger Zufall, daß man die zwei Singularitäten resp. an den Reihen *desselben konjugierten Paares* beobachten konnte. Jetzt kann ich, auf Grund der Eigenschaften 1) 2) 3) und des allgemeinen Theorems IV, sagen, daß die Eigenschaft 4) der Reihe

$$\gamma_1 \sin\theta + \cdots + \gamma_n \sin n\theta + \cdots \tag{19.}$$

eine *Folge* der Eigenschaft 5) der Reihe

$$\gamma_1 \cos\theta + \cdots + \gamma_n \cos n\theta + \cdots \tag{20.}$$

ist. Würde nämlich die Reihe (19.) für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ gleichmäßig konvergieren, so müßte, laut Theorem IV, auch die Reihe (20.) für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ gleichmäßig konvergieren. Das ist aber nicht der Fall, da doch die Reihe (20.), laut 5), sogar divergiert, für $\theta = 0$.

Ich habe also, an der Hand des Beispiels (18.), die *Existenz der Lebesgueschen Singularität aus der Existenz der du Bois-Reymondschen Singularität, mit Hilfe des allgemeinen Theorems* IV, *gefolgert.*

Ich kann überhaupt, als unmittelbare Folge des Theorems IV, das folgende Theorem formulieren:

Theorem V. *Die Potenzreihe*

$$\varphi(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n + \cdots \tag{21.}$$

sei für $|z| < 1$ *konvergent, und ihre Summe* $\varphi(z)$ *für* $|z| < 1$ *sei für* $|z| \leqq 1$ *stetig. Ist dann die eine Komponente dieser Potenzreihe für* $|z| = 1$ *konvergent, so zeigt diese notwendigerweise die Lebesguesche Singularität, falls die andere Komponente die du Bois-Reymondsche Singularität aufweist**).

Ich habe also eine Klasse von Potenzreihen angegeben, für welche das Auftreten der *du Bois-Reymond*schen Singularität in der *einen* Komponente das Auftreten der *Lebesgue*schen Singularität in der *anderen* Komponente nach sich zieht.

---

*) Dieses Theorem V läßt einen eigentümlichen *Zusammenhang* zwischen der *Lebesgue*schen und *du Bois-Reymond*schen Singularität bei konjugierten Reihen erkennen.

8. Laut Theorem IV konvergiert die für $|z| \leqq 1$ stetige Potenzreihe (17.) notwendigerweise gleichmäßig für $|z| = 1$ (und also auch für $|z| \leqq 1$), wenn nur *eine* ihrer Komponenten für $|z| = 1$ gleichmäßig konvergiert.

Ich erwähne hier, daß ich einmal schon aus anderen Prämissen auf die gleichmäßige Konvergenz für $|z| = 1$ einer für $|z| \leqq 1$ stetigen Potenzreihe

$$(22.) \qquad \Phi(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

geschlossen habe*).

Ich setze also wieder voraus, daß die Potenzreihe für $|z| < 1$ konvergiert und daß ihre Summe $\Phi(z)$ (für $|z| < 1$) stetig ist für $|z| \leqq 1$. Dann folgt schon die gleichmäßige Konvergenz der Potenzreihe (22.) für $|z| = 1$, falls

$$\Phi(z_1) + \Phi(z_2),$$

wo z_1, z_2 zwei beliebige, voneinander verschiedene Punkte im Innern des Einheitskreises der z-Ebene bedeuten, d. h. falls die Funktion $w = \Phi(z)$ das Innere des Einheitskreises *schlicht* auf ein Gebiet der w-Ebene abbildet.

(Ich bemerke, daß es z. B. genügt hätte die gleichmäßige Konvergenz der *einen* Komponente von (22.) für $|z| = 1$ zu beweisen; denn aus Theorem IV folgt dann schon die gleichmäßige Konvergenz der anderen Komponente.)

9. In den Nummern 6., 7., 8. habe ich vorausgesetzt, daß auch die konjugierte Reihe (2.) der Reihe (1.) die *Fourier*sche Reihe einer überall stetigen (nach 2π periodischen) Funktion ist.

Jetzt kehre ich zum allgemeinen Fall zurück und setze wieder nur so viel voraus, daß die Reihe

$$(1.) \qquad a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta)$$

für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ gleichmäßig konvergiert.

Was folgt für die Konvergenz der konjugierten Reihe (2.) — ohne jede weitere Voraussetzung? Die Antwort gibt das folgende

---

*) S. meine Note: „La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissance effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple". Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, Paris, 6 janvier 1913.

Theorem VI. *Ist die trigonometrische Reihe*

$$(1.) \qquad a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta)$$

für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ *gleichmäßig konvergent, so ist ihre konjugierte Reihe*

$$(2.) \qquad c + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-b_\nu \cos \nu\theta + a_\nu \sin \nu\theta)$$

im Intervalle $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, *von einer Punktmenge vom Maße Null abgesehen, überall konvergent.*

Aus der Voraussetzung für die Reihe (1.) folgt nämlich mit Hilfe der bekannten Sätze der Herren *Lebesgue, F. Riesz, Fischer*, daß die Reihe (2.) die *Fourier*sche Reihe einer für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ im *Lebesgue*schen Sinne integrierbaren Funktion ist, und daß sie also für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ „fast überall" summabel ist. Aus Theorem II folgt dann, daß sie „fast überall" *konvergent* ist.

Über die Grundlagen einer neuen Theorie der quadratischen Zahlkörper.

Von Herrn *K. Hensel* in Marburg a. L.

In der Vorrede meiner soeben veröffentlichten „Zahlentheorie“ (Berlin, *G. J. Göschens* Verlag, 1913) habe ich darauf hingewiesen, daß die in jenem Werke durchgeführte Untersuchung der Ringe aller g-adischen Zahlen und ihre Reduktion auf die zugehörigen Zahlkörper die einzige Aufgabe ist, welche die elementare rationale, aber auch die höhere algebraische Zahlentheorie darbietet. In der vorliegenden Abhandlung möchte ich diese letzte Aufgabe für den einfachsten Fall der algebraischen Zahlen, den allgemeinen quadratischen Zahlkörper, lösen. Ich werde dieses Werk im folgenden durch „Z.“ zitieren.

§ 1. Untersuchung der Zahlen von $K(\delta)$ für den Bereich von g. Der Ring $R(g, \delta)$ der g-adischen Zahlen und seine vollständige Zerlegung in Zahlkörper.

Es sei D eine beliebige ganze Zahl, welche ich der Einfachheit wegen von vornherein ohne gleiche Primfaktoren voraussetze, und $\delta = \sqrt{D}$. Dann sei $K(\delta)$ der Körper aller rationalen Funktionen von δ, welche sämtlich in der Form $\alpha = \bar{a} + \bar{b}\delta$ mit rationalen Koeffizienten $\bar{a}$ und $\bar{b}$ dargestellt werden können. Eine solche Zahl heißt *ganz*, wenn die quadratische Gleichung

$$x^2 - 2\bar{a}x + (\bar{a}^2 - D\bar{b}^2) = 0, \tag{1.}$$

welcher sie nebst ihrer konjugierten $\alpha' = \bar{a} - \bar{b}\delta$ genügt, ganzzahlige Koeffizienten hat. Man zeigt ganz elementar, daß alle und nur die ganzen Zahlen von $K(\delta)$ eindeutig durch ein Fundamentalsystem, z. B. durch das

System $(1, \xi)$ ganzzahlig darstellbar sind, wo $\xi = \delta$ oder $\frac{1+\delta}{2}$ ist, je nachdem $D = 4n+2, 3$ oder $D = 4n+1$ ist.

Die sogenannte *Körperdiskriminante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & \xi \\ 1, & \xi' \end{vmatrix}^2 = (\xi - \xi')^2$$

ist also $4D$ oder D, je nachdem $D = 4n+2, 3$ oder $4n+1$ ist. Alle in Δ enthaltenen Primzahlen, die sogenannten *Diskriminantenteiler*, sind also die sämtlichen Primfaktoren von D und außerdem noch die Primzahl 2, falls $D = 4n+3$ ist.

Eine ganze Zahl $\alpha = a + b\xi$ ist hiernach dann und nur dann durch eine beliebige ganze rationale Zahl g teilbar, wenn a und b g enthalten. Jede solche Zahl kann also eindeutig in der Form

$$\alpha = \alpha_0 + g\alpha' \tag{2.}$$

dargestellt werden, wo $\alpha_0 = a_0 + b_0\xi$ eine der g^2 modulo g inkongruenten reduzierten Zahlen von $K(\delta)$ bedeutet, für welche a_0, b_0 ganze rationale Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots g-1$ sind. Stellt man die ganze Zahl α' in derselben Weise dar und fährt so beliebig weiter fort, so erhält man eine Kette von Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha_1 + g\alpha'', \\ &\cdots\cdots\cdots, \end{aligned} \tag{2a.}$$

aus deren Verbindung sich sofort die folgende Darstellung für α ergibt:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 g + \alpha_2 g^2 + \cdots + \alpha_\varrho g^\varrho + \alpha^{(\varrho+1)} g^{\varrho+1}. \tag{2b.}$$

Hier sind $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ eindeutig bestimmte reduzierte Zahlen, während $\alpha^{(\varrho+1)}$ eine ganze Zahl bedeutet. Diese Reihe kann beliebig weit fortgesetzt werden und stellt α eindeutig dar. Dasselbe gilt offenbar auch für jede gebrochene Zahl α, nur können dann eine endliche Anzahl von Potenzen von g mit negativen Exponenten auftreten. Dieses Resultat ist die Verallgemeinerung des Satzes (4.) in Z., S. 51.

Ebenso wie im vierten Kapitel von Z. will ich jetzt jede Reihe:

$$\alpha = \alpha_\varrho g^\varrho + \alpha_{\varrho+1} g^{\varrho+1} + \cdots = 0,00 \ldots \alpha_\varrho \alpha_{\varrho+1} \ldots \tag{3.}$$

mit beliebigen ganzen Koeffizienten $\alpha_i = a_i + b_i\xi$ *eine g-adische Zahl* nennen, sobald eine Vorschrift gegeben ist, nach der diese Koeffizienten, soweit man will, berechnet werden können. Danach ist durch die Gleichung (2b.) jeder Zahl von $K(\delta)$ eine solche g-adische Zahl zugeordnet. Ich übertrage die für die rationalen g-adischen Zahlen definierten Begriffe der *redu-*

zierten und *nicht reduzierten* Zahl auf diese algebraischen Zahlen (Z., S. 58). Ebenso definiere ich hier die *Näherungswerte dieser Zahlen* und die *Kongruenz* zweier g-adischen Zahlen für eine beliebige Potenz von g als Modul, und ich nenne endlich auch hier zwei solche Zahlen *gleich* für den Bereich von g, wenn sie für jede noch so hohe Potenz von g als Modul kongruent sind (Z., S. 60). Dann ist jede g-adische Zahl einer einzigen reduzierten Zahl gleich (Z., S. 60).

Auch für die g-adischen algebraischen Zahlen definiere ich zwei Verknüpfungsoperationen, die ich Addition und Multiplikation nenne; sind nämlich

$$(4.)\quad \alpha = \alpha_0 + \alpha_1 g + \alpha_2 g^2 + \cdots,\ \gamma = \gamma_0 + \gamma_1 g + \gamma_2 g^2 + \cdots$$

zwei beliebige g-adische Zahlen, so soll genau wie in Z., S. 63 ff.:

$$(4^a.)\quad \begin{aligned} \alpha + \gamma &= (\alpha_0 + \gamma_0) + (\alpha_1 + \gamma_1) g + \cdots \\ \alpha\gamma &= \alpha_0\gamma_0 + (\alpha_0\gamma_1 + \alpha_1\gamma_0) g + \cdots \end{aligned}$$

definiert werden. Dann zeigt man genau wie a. a. O., daß diese g-adischen algebraischen Zahlen einen Zahlenring $R(g, \delta)$ bilden, weil in ihm die Addition, Subtraktion und Multiplikation unbeschränkt und eindeutig ausführbar ist.

Speziell läßt sich jetzt jede g-adische Zahl in der Form darstellen:

$$\begin{aligned} \alpha &= (a_0 + b_0\xi) + (a_1 + b_1\xi) g + \cdots \\ &= (a_0 + a_1 g + a_2 g^2 + \cdots) + (b_0 + b_1 g + b_2 g^2 + \cdots)\xi = a + b\xi, \end{aligned}$$

wo a und b bestimmte rationale g-adische Zahlen sind, und umgekehrt ist jede solche Zahlgröße $\alpha = a + b\xi$ mit rationalen g-adischen Koeffizienten eine algebraische g-adische Zahl in unserem Sinne. Ersetzt man hier wieder ξ durch δ bzw. $\frac{1+\delta}{2}$, so erkennt man, daß der Ring $R(g, \delta)$ aus allen und nur den Zahlen $\bar{a} + \bar{b}\delta$ mit rationalen g-adischen Koeffizienten besteht unter der Voraussetzung, daß $\delta^2 - D = 0$ ist, und daß für sie die beiden Verknüpfungsoperationen durch die Gleichungen:

$$(5.)\quad \begin{aligned} \alpha + \gamma &= (a + b\delta) + (c + e\delta) = (a + c) + (b + e)\delta, \\ \alpha\gamma &= (a + b\delta)(c + e\delta) = (ac + Dbe) + (ae + bc)\delta \end{aligned}$$

definiert sind; endlich ist stets und nur dann $\alpha = a + b\delta = 0$, wenn $a = b = 0$ ist. Dasselbe Resultat können wir auch so aussprechen:

Betrachten wir alle ganzen rationalen Funktionen von δ mit rationalen g-adischen Koeffizienten modulo $\delta^2 - D$, so erhalten wir den Ring aller g-adischen algebraischen Zahlen;

System $(1, \xi)$ ganzzahlig darstellbar sind, wo $\xi = \delta$ oder $\frac{1+\delta}{2}$ ist, je nachdem $D = 4n+2, 3$ oder $D = 4n+1$ ist.

Die sogenannte *Körperdiskriminante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & \xi \\ 1, & \xi' \end{vmatrix}^2 = (\xi - \xi')^2$$

ist also $4D$ oder D, je nachdem $D = 4n+2, 3$ oder $4n+1$ ist. Alle in Δ enthaltenen Primzahlen, die sogenannten *Diskriminantenteiler*, sind also die sämtlichen Primfaktoren von D und außerdem noch die Primzahl 2, falls $D = 4n+3$ ist.

Eine ganze Zahl $\alpha = a + b\xi$ ist hiernach dann und nur dann durch eine beliebige ganze rationale Zahl g teilbar, wenn a und b g enthalten. Jede solche Zahl kann also eindeutig in der Form

$$\alpha = \alpha_0 + g\alpha' \tag{2.}$$

dargestellt werden, wo $\alpha_0 = a_0 + b_0\xi$ eine der g^2 modulo g inkongruenten reduzierten Zahlen von $K(\delta)$ bedeutet, für welche a_0, b_0 ganze rationale Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots g-1$ sind. Stellt man die ganze Zahl α' in derselben Weise dar und fährt so beliebig weiter fort, so erhält man eine Kette von Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha_1 + g\alpha'', \\ &\cdots\cdots\cdots, \end{aligned} \tag{2a.}$$

aus deren Verbindung sich sofort die folgende Darstellung für α ergibt:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 g + \alpha_2 g^2 + \cdots + \alpha_\varrho g^\varrho + \alpha^{(\varrho+1)} g^{\varrho+1}. \tag{2b.}$$

Hier sind $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ eindeutig bestimmte reduzierte Zahlen, während $\alpha^{(\varrho+1)}$ eine ganze Zahl bedeutet. Diese Reihe kann beliebig weit fortgesetzt werden und stellt α eindeutig dar. Dasselbe gilt offenbar auch für jede gebrochene Zahl α, nur können dann eine endliche Anzahl von Potenzen von g mit negativen Exponenten auftreten. Dieses Resultat ist die Verallgemeinerung des Satzes (4.) in Z., S. 51.

Ebenso wie im vierten Kapitel von Z. will ich jetzt jede Reihe:

$$\alpha = \alpha_\varrho g^\varrho + \alpha_{\varrho+1} g^{\varrho+1} + \cdots = 0,00 \ldots \alpha_\varrho \alpha_{\varrho+1} \cdots \tag{3.}$$

mit beliebigen ganzen Koeffizienten $\alpha_i = a_i + b_i\xi$ *eine g-adische Zahl* nennen, sobald eine Vorschrift gegeben ist, nach der diese Koeffizienten, soweit man will, berechnet werden können. Danach ist durch die Gleichung (2b.) jeder Zahl von $K(\delta)$ eine solche g-adische Zahl zugeordnet. Ich übertrage die für die rationalen g-adischen Zahlen definierten Begriffe der *redu-*

zierten und *nicht reduzierten* Zahl auf diese algebraischen Zahlen (Z., S. 58). Ebenso definiere ich hier die *Näherungswerte dieser Zahlen* und die *Kongruenz* zweier g-adischen Zahlen für eine beliebige Potenz von g als Modul, und ich nenne endlich auch hier zwei solche Zahlen *gleich* für den Bereich von g, wenn sie für jede noch so hohe Potenz von g als Modul kongruent sind (Z., S. 60). Dann ist jede g-adische Zahl einer einzigen reduzierten Zahl gleich (Z., S. 60).

Auch für die g-adischen algebraischen Zahlen definiere ich zwei Verknüpfungsoperationen, die ich Addition und Multiplikation nenne; sind nämlich

$$(4.)\quad \alpha = \alpha_0 + \alpha_1 g + \alpha_2 g^2 + \cdots,\ \gamma = \gamma_0 + \gamma_1 g + \gamma_2 g^2 + \cdots$$

zwei beliebige g-adische Zahlen, so soll genau wie in Z., S. 63 ff.:

$$(4^a.)\quad \begin{aligned} \alpha + \gamma &= (\alpha_0 + \gamma_0) + (\alpha_1 + \gamma_1) g + \cdots \\ \alpha\gamma &= \alpha_0\gamma_0 + (\alpha_0\gamma_1 + \alpha_1\gamma_0) g + \cdots \end{aligned}$$

definiert werden. Dann zeigt man genau wie a. a. O., daß diese g-adischen algebraischen Zahlen einen Zahlenring $R(g, \delta)$ bilden, weil in ihm die Addition, Subtraktion und Multiplikation unbeschränkt und eindeutig ausführbar ist.

Speziell läßt sich jetzt jede g-adische Zahl in der Form darstellen:

$$\begin{aligned} \alpha &= (a_0 + b_0\xi) + (a_1 + b_1\xi) g + \cdots \\ &= (a_0 + a_1 g + a_2 g^2 + \cdots) + (b_0 + b_1 g + b_2 g^2 + \cdots)\xi = a + b\xi, \end{aligned}$$

wo a und b bestimmte rationale g-adische Zahlen sind, und umgekehrt ist jede solche Zahlgröße $\alpha = a + b\xi$ mit rationalen g-adischen Koeffizienten eine algebraische g-adische Zahl in unserem Sinne. Ersetzt man hier wieder ξ durch δ bzw. $\frac{1+\delta}{2}$, so erkennt man, daß der Ring $R(g, \delta)$ aus allen und nur den Zahlen $\bar{a} + \bar{b}\delta$ mit rationalen g-adischen Koeffizienten besteht unter der Voraussetzung, daß $\delta^2 - D = 0$ ist, und daß für sie die beiden Verknüpfungsoperationen durch die Gleichungen:

$$(5.)\quad \begin{aligned} \alpha + \gamma &= (a + b\delta) + (c + e\delta) = (a + c) + (b + e)\delta, \\ \alpha\gamma &= (a + b\delta)(c + e\delta) = (ac + Dbe) + (ae + bc)\delta \end{aligned}$$

definiert sind; endlich ist stets und nur dann $\alpha = a + b\delta = 0$, wenn $a = b = 0$ ist. Dasselbe Resultat können wir auch so aussprechen:

Betrachten wir alle ganzen rationalen Funktionen von δ mit rationalen g-adischen Koeffizienten modulo $\delta^2 - D$, so erhalten wir den Ring aller g-adischen algebraischen Zahlen;

denn jede solche ganze rationale Funktion $\varphi(\delta)$ ist ja modulo $\delta^2 - D$ einer eindeutig bestimmten Zahl $\bar{a} + \bar{b}\delta$ kongruent. Für zwei beliebige Zahlen $\alpha = a + b\delta$ und $\gamma = c + e\delta$ sind $\alpha + \gamma$ und $\alpha\gamma$ durch die Gleichungen (5.) definiert, und endlich ist stets und nur dann $\alpha = 0$, wenn $a = b = 0$ ist.

Im folgenden brauchen daher nur diese Zahlen $a + b\delta$ untersucht zu werden.

Auch hier kann man nun, genau wie im Bereiche der rationalen g-adischen Zahlen, die Untersuchung auf den einfachsten Fall reduzieren, daß die Grundzahl g eine Primzahl, oder, was genau auf dasselbe herauskommt, eine Primzahlpotenz ist. Und zwar ist dies eine unmittelbare Folge des Satzes:

> Ist $g = PQ$ irgendeine Zerlegung von g in zwei teilerfremde Faktoren, so kann man jede g-adische Zahl α auf eine einzige Weise in der folgenden Form darstellen:
>
> (6.) $$\alpha = \alpha_P + \alpha_Q \quad (g);$$
>
> hier sind α_P und α_Q zwei g-adische Zahlen, welche durch die Bedingungen:
>
> (6^a.) $$\alpha_P = \alpha \quad (P), \qquad \alpha_P = 0 \quad (Q),$$
> $$\alpha_Q = 0 \quad (P), \qquad \alpha_Q = \alpha \quad (Q)$$
>
> eindeutig bestimmt sind.
>
> Sind umgekehrt $\bar{\alpha}_P$ eine beliebig vorgegebene P-adische und $\bar{\alpha}_Q$ eine Q-adische Zahl, so gibt es eine einzige g-adische Zahl α von der Art, daß
>
> (6^b.) $$\alpha = \bar{\alpha}_P \quad (P), \qquad \alpha = \bar{\alpha}_Q \quad (Q)$$
>
> ist.

In der Tat, ist $\alpha = a + b\delta$ eine beliebige g-adische Zahl, und sind

$$a = a_P + a_Q \quad (g), \qquad b = b_P + b_Q \quad (g)$$

die Darstellungen der beiden rationalen Zahlen a und b in der additiven Normalform: (Z., S. 83 oben), so ist ja z. B. für a_P und b_P

$$a_P = a \quad (P), \qquad a_P = 0 \quad (Q),$$
$$b_P = b \quad (P), \qquad b_P = 0 \quad (Q)$$

usw.; also folgt für α selbst die Darstellung:

$$\alpha = (a_P + b_P\delta) + (a_Q + b_Q\delta) = \alpha_P + \alpha_Q,$$

wo α_P und α_Q in der Tat die Gleichungen (6^a.) befriedigen. Sind umgekehrt

$$\bar{\alpha}_P = \bar{a}_P + \bar{b}_P \delta \quad (P), \qquad \bar{\alpha}_Q = \bar{a}_Q + \bar{b}_Q \delta \quad (Q)$$

je eine beliebig gegebene P-adische bzw. Q-adische algebraische Zahl, so kann man (nach Z., S. 78 ff.) zwei eindeutig bestimmte rationale g-adische Zahlen a und b so finden, daß

$$a = \bar{a}_P \quad (P), \qquad a = \bar{a}_Q \quad (Q)$$
$$b = \bar{b}_P \quad (P), \qquad b = \bar{b}_Q \quad (Q)$$

ist; dann genügt also die algebraische g-adische Zahl $\alpha = a + b\delta$ in der Tat den beiden letzten Forderungen des obigen Satzes.

Durch Fortsetzung der hier gegebenen Dekomposition ergibt sich also der folgende Satz:

> Sind $p, q, \ldots r$ alle in g enthaltenen voneinander verschiedenen Primfaktoren, so ist jede g-adische algebraische Zahl α auf eine einzige Weise in der Form:
>
> (7.) $$\alpha = \alpha_p + \alpha_q + \cdots + \alpha_r \quad (g)$$
>
> darstellbar, in welcher die g-adischen Zahlen $\alpha_p, \ldots$ durch die Gleichungen:
>
> (7ª.) $$\alpha_p = \alpha \ (p), \quad \alpha_p = 0 \ (q), \ldots \alpha_p = 0 \ (r),$$
> $$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
>
> usw. eindeutig bestimmt sind. Sind umgekehrt $\bar{\alpha}_p, \bar{\alpha}_q, \ldots \bar{\alpha}_r$ je eine beliebige p-adische, q-adische, $\ldots r$-adische Zahl, so gibt es im Ringe $R(g, \delta)$ eine einzige Zahl α, deren Wert für den Bereich von $p, q, \ldots r$ bzw. gleich $\bar{\alpha}_p, \bar{\alpha}_q, \ldots \bar{\alpha}_r$ ist.

In genau derselben Weise kann man auch zeigen, daß sich jede g-adische Zahl α eindeutig in der multiplikativen Normalform:

(8.) $$\alpha = \alpha_p^{(0)} \alpha_q^{(0)} \cdots \alpha_r^{(0)}$$

darstellen läßt, wo z. B. die p-Komponente $\alpha_p^{(0)}$ durch die Gleichungen:

(8ª.) $$\alpha_p^{(0)} = \alpha \ (p), \quad \alpha_p^{(0)} = 1 \ (q), \ \ldots \ \alpha_p^{(0)} = 1 \ (r)$$

eindeutig bestimmt ist (vgl. Z., S. 89 ff.).

Hiernach sind also nur noch die p-adischen algebraischen Zahlen $a + b\delta$, oder, was dasselbe ist, die ganzen rationalen Funktionen $\alpha = \varphi(\delta)$ mit rationalen p-adischen Koeffizienten modulo $\delta^2 - D$ weiter zu untersuchen. Während nun der Ring der *rationalen* p-adischen Zahlen stets einen Körper bildet, weil in ihm auch die Division unbeschränkt und eindeutig ausführbar ist, ist dies für die algebraischen p-adischen Zahlen stets und nur dann der Fall, wenn $\delta^2 - D$ innerhalb $K(p)$ unzerlegbar ist.

In der Tat, ist $\delta^2 - D$ irreduzibel, so ist jede Gleichung $\alpha\xi = \gamma\ (p)$ innerhalb des Ringes $R(p, \delta)$ eindeutig lösbar, wenn $\alpha = \varphi(\delta)$ nicht Null, wenn also $\varphi(\delta)$ nicht durch $\delta^2 - D$ teilbar ist; denn dann kann man durch das Euklidische Teilerverfahren stets zwei ganze Funktionen $\overline{\alpha} = \overline{\varphi}(\delta)$ und $\overline{\beta} = \overline{\psi}(\delta)$ so bestimmen, daß:

$$\varphi(\delta)\,\overline{\varphi}(\delta) + (\delta^2 - D)\,\overline{\psi}(\delta) = 1,$$

daß also $\alpha\overline{\alpha} = 1$ oder $\frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$ ist, und dann ergibt sich die Lösung der obigen Gleichung eindeutig in der Form $\xi = \frac{\gamma}{\alpha} = \gamma\overline{\alpha}$.

Ist dagegen $\delta^2 - D$ innerhalb des Körpers $K(p)$ zerlegbar, so gibt es eine solche rationale p-adische Zahl d, daß:

$$(9.)\quad \delta^2 - D = (\delta - d)(\delta + d), \quad \text{daß also} \quad D = d^2 \quad (p)$$

ist; beachtet man nun, daß in der ersten von diesen Gleichungen (9.), die linke Seite Null, die Faktoren rechts aber beide von Null verschieden sind, so folgt schon aus ihr, daß jener Bereich kein Körper sein kann, weil das Produkt $(\delta - d)(\delta + d)$ Null ist, ohne daß einer seiner Faktoren verschwindet. Es ergibt sich also der folgende einfache Satz:

> Der Ring $R(p, \delta)$ der p-adischen algebraischen Zahlen ist stets und nur dann kein Körper, wenn $D = d^2$ eine p-adische Quadratzahl, wenn also $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$ ist.

Ist nun zunächst $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$, ist also der Ring $R(p, \delta)$ aller p-adischen Zahlen $\overline{\alpha} = \overline{a} + \overline{b}\delta\ (p)$ ein Körper, so will ich der Primzahl p *eine Stelle* $\mathfrak{p}$ zuordnen und den p-adischen Wert $\overline{\alpha}$ einer Zahl α von $K(\delta)$ oder von $R(g, \delta)$ *den Wert von* α *für die Stelle* $\mathfrak{p}$ nennen. Ich drücke diese Beziehung durch die Gleichung

$$\alpha = \overline{\alpha} = \overline{a} + \overline{b}\delta \quad (\mathfrak{p})$$

aus. Entsprechend bezeichne ich den Körper $R(p, \delta)$ aller p-adischen Zahlen $\overline{\alpha}$ durch $K(\mathfrak{p})$ und nenne ihn *den zur Stelle* $\mathfrak{p}$ *gehörigen Zahlkörper.* Dann ist der Körper $K(\mathfrak{p})$ dem Ringe $R(g, \delta)$ aller g-adischen Zahlen offenbar isomorph.

Ist dagegen der Ring $R(p, \delta)$ noch kein Körper, ist also $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$, und $D = d^2\ (p)$, so können wir denselben genau wie vorher (a. S. 60) aus zwei Körpern komponieren. Dazu ordnen wir jeder algebraischen p-adischen Zahl $\alpha = a + b\delta$ die beiden rationalen p-adischen Zahlen:

(10.) $$\bar{\alpha} = a + bd \qquad \text{und} \qquad \bar{\alpha}' = a - bd$$

zu, welche aus α dadurch hervorgehen, daß δ durch d bzw. durch $-d$ ersetzt wird.

Wir wollen in diesem Falle $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$ der reellen Primzahl p jetzt die beiden Stellen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ zuordnen und $\bar{\alpha}$ bzw. $\bar{\alpha}'$ *die Werte von* α *für diese Stellen* $\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{p}'$ nennen. Wir drücken diese Beziehung aus durch die beiden Gleichungen:

(10ª.) $$\alpha = \bar{\alpha} \quad (\mathfrak{p}) \qquad \alpha = \bar{\alpha}' \quad (\mathfrak{p}').$$

Sind dann $\alpha = a + b\delta$, $\gamma = c + e\delta$ zwei beliebige p-adische algebraische Zahlen, und ist z. B. für die Stelle $\mathfrak{p}$:

$$\alpha = a + bd = \bar{\alpha} \ (\mathfrak{p}), \qquad \gamma = c + ed = \bar{\gamma} \ (\mathfrak{p}),$$

so ist, weil $d^2 = \delta^2 = D \ (p)$ ist:

$$\alpha + \gamma = (a + c) + (b + e)d = \bar{\alpha} + \bar{\gamma} \ (\mathfrak{p}),$$
$$\alpha\gamma = (ac + Dbe) + (ae + bc)d = \bar{\alpha}\bar{\gamma} \ (\mathfrak{p}),$$

und das entsprechende ist für die Stelle $\mathfrak{p}'$ der Fall. Endlich ist eine p-adische Zahl α dann und nur dann gleich Null, wenn ihre Werte für *die beiden* Stellen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ gleich Null sind; denn aus den beiden Gleichungen $a + bd = 0$ und $a - bd = 0$ folgt ja $a = b = 0$, und umgekehrt.

Die rationalen p-adischen Zahlen $\bar{\alpha} = a + bd$, welche die Werte aller algebraischen p-adischen Zahlen $\alpha = a + b\delta$ für die Stelle $\mathfrak{p}$ sind, bilden nun einen Körper $K(\mathfrak{p})$, da ja für sie auch jede Gleichung $\bar{\alpha}\bar{\xi} = \bar{\gamma} \ (p)$, falls $\bar{\alpha} \not\equiv 0 \ (p)$ ist, die eindeutig bestimmte Lösung $\bar{\xi} = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\alpha}} \ (p)$ besitzt; und das gleiche gilt für die Zahlen $\bar{\alpha}' = a - bd$. Jeder von diesen beiden Körpern $K(\mathfrak{p})$ und $K(\mathfrak{p}')$ ist somit dem Ringe $R(p, \delta)$ isomorph.

Ich zeige nun endlich direkt, daß man jede p-adische algebraische Zahl $\alpha = a + b\delta$ wieder eindeutig in der additiven Normalform:

(11.) $$\alpha = \alpha_{\mathfrak{p}} + \alpha_{\mathfrak{p}'} \ (p)$$

schreiben kann, wo $\alpha_{\mathfrak{p}}$ und $\alpha_{\mathfrak{p}'}$ zwei p-adische algebraische Zahlen sind, welche wieder durch die Gleichungen:

(11ª.) $$\begin{aligned} \alpha_{\mathfrak{p}} &= \alpha \quad (\mathfrak{p}), & \alpha_{\mathfrak{p}} &= 0 \quad (\mathfrak{p}'), \\ \alpha_{\mathfrak{p}'} &= 0 \quad (\mathfrak{p}), & \alpha_{\mathfrak{p}'} &= \alpha \quad (\mathfrak{p}') \end{aligned}$$

eindeutig bestimmt sind. Dies folgt unmittelbar aus der Identität:

(12.) $$\alpha = a + b\delta = (a + bd) \cdot \frac{d + \delta}{2d} + (a - bd)\frac{d - \delta}{2d};$$

denn die beiden rechts stehenden Summanden:

$$(12^{a}.)\qquad \alpha_{\mathfrak{p}} = (a + bd)\frac{d+\delta}{2d} = \bar{\alpha}\cdot\frac{d+\delta}{2d},$$
$$\alpha_{\mathfrak{p}'} = (a - bd)\frac{d-\delta}{2d} = \bar{\alpha}'\,\frac{d-\delta}{2d}$$

genügen in der Tat den obigen Gleichungen und sind durch sie eindeutig bestimmt. Sind umgekehrt zwei rationale p-adische Zahlen $\bar{\alpha}$ und $\bar{\alpha}'$ ganz beliebig gegeben, so kann man eine eindeutig bestimmte p-adische algebraische Zahl finden, deren Werte für die Stellen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ bzw. gleich $\bar{\alpha}$ und $\bar{\alpha}'$ sind, nämlich offenbar die Zahl:

$$(12^{b}.)\qquad \alpha = \frac{\bar{\alpha}+\bar{\alpha}'}{2} + \frac{\bar{\alpha}-\bar{\alpha}'}{2d}\,\delta.$$

Es möge nun die Grundzahl g die verschiedenen Primfaktoren $p, q, \ldots r$ enthalten, und es sei für diese

$$\left(\frac{D}{p}\right) = +1; \quad \text{aber} \quad \left(\frac{D}{q}\right) = \cdots = \left(\frac{D}{r}\right) = -1,$$

so besteht nach den Ergebnissen der bisherigen Betrachtungen für jede Zahl $\alpha = a + b\delta$ mit gewöhnlichen rationalen oder auch mit beliebigen g-adischen Koeffizienten die folgende einfache Darstellung:

$$(13.)\qquad \alpha = \alpha_{\mathfrak{p}} + \alpha_{\mathfrak{p}'} + \alpha_q + \cdots + \alpha_r \quad (g)$$

oder ausgeschrieben:

$$(13^{a}.)\; a + b\delta = (a_p + b_p d_p)\frac{d_p+\delta}{2d_p} + (a_p - b_p d_p)\frac{d_p-\delta}{2d_p} + (a_q + b_q\delta) + \cdots + (a_r + b_r\delta).$$

In der zweiten Darstellung bedeutet z. B. a_p oder d_p diejenige eindeutig bestimmte rationale g-adische Zahl, welche für den Bereich der zugehörigen Primzahl p gleich a oder gleich $d = \sqrt{D}$, für jede der anderen Primzahlen $q, \ldots r$ aber gleich Null ist, und das entsprechende gilt für alle anderen rechtsstehenden Koeffizienten $b_p, a_q, \ldots b_r$. Die in (13.) gegebene Darstellung soll auch hier die *Darstellung von α in der additiven Normalform* heißen.

Genau ebenso beweist man, daß aus (13.) die folgende Darstellung von α in der *multiplikativen Normalform* folgt:

$$(14.)\qquad \alpha = \bar{\alpha}_{\mathfrak{p}}\,\bar{\alpha}_{\mathfrak{p}'}\,\bar{\alpha}_q \cdots \bar{\alpha}_r \quad (g),$$

wo jeder der rechtsstehenden Faktoren eine g-adische Zahl ist, welche für die dem Index entsprechende Stelle gleich α, für jede andere Stelle aber gleich 1 ist.

Sind umgekehrt für die einzelnen zu g gehörigen Stellen $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{q}, \ldots \mathfrak{r}$ beliebige rationale p-adische bzw. algebraische q-adische ... r-adische Zahlen

vorgegeben, so gibt es eine einzige g-adische algebraische Zahl α, welche für jene einzelnen Stellen gerade diese vorgegebenen Werte besitzt.

Hiernach ist also die Untersuchung aller Zahlen des Zahlkörpers $K(\delta)$ für den Bereich einer beliebigen Grundzahl g vollständig reduziert auf die Untersuchung aller dieser Zahlen für eine beliebige Stelle $\mathfrak{p}$. Diese Aufgabe soll im nächsten Abschnitte gelöst werden.

§ 2. Untersuchung der Zahlen eines Körpers für den Bereich einer Stelle $\mathfrak{p}$.

Im folgenden soll eine zu einer reellen Primzahl p gehörige Stelle $\mathfrak{p}$ *von der ersten oder von der zweiten Ordnung* genannt werden, je nachdem $\left(\frac{D}{p}\right)$ gleich $+1$ oder -1 ist. Im letzten Falle gehört zu p nur eine Stelle $\mathfrak{p}$, im ersten zwei $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$, welche *konjugierte Stellen* heißen sollen.

Alle algebraischen Zahlen $a+b\delta$ sind nun für eine Stelle $\mathfrak{p}$ gleich den rationalen Zahlen $\alpha = a + bd$ oder den algebraischen Zahlen $\alpha = a + b\delta$, je nachdem $\mathfrak{p}$ vom ersten oder zweiten Grade ist. Die Gesamtheit aller dieser Zahlen bildet stets einen Körper $K(\mathfrak{p})$ vom ersten oder zweiten Grade über dem Körper $K(p)$ der rationalen p-adischen Zahlen; denn in beiden Fällen genügt jede Zahl α einer Gleichung des ersten oder zweiten Grades

$$(1.) \qquad \begin{gathered} x - \alpha = 0 \ (\mathfrak{p}), \\ (x-\alpha)(x-\alpha') = x^2 - 2ax + (a^2 - Db^2) = x^2 - \bar{a}x + \bar{b} = 0 \ (\mathfrak{p}) \end{gathered}$$

mit rationalen p-adischen Koeffizienten, von denen die zweite irreduzibel oder das Quadrat eines irreduziblen Linearfaktors ist, je nachdem $b \neq 0$ oder $b = 0$ ist.

Ich nenne wieder eine Zahl α *ganz* für die Stelle $\mathfrak{p}$, wenn die Koeffizienten der irreduziblen Gleichung niedrigsten Grades, der α in $K(p)$ genügt, ganze p-adische Zahlen sind, wenn also im ersten Falle $\alpha = a + bd$ selbst eine ganze p-adische Zahl ist, während im zweiten Falle

$$\bar{a} = 2a = \alpha + \alpha' \qquad \bar{b} = a^2 - Db^2 = \alpha\alpha'$$

ganze p-adische Zahlen sein müssen.

In diesem zweiten Falle nun kann man die erste Bedingung einfach fortlassen, da sie von selbst erfüllt ist, wenn $\bar{b}$ ganz ist. Ist nämlich $\bar{b}$ ganz und $\bar{a} = \frac{a_0}{p^b}$ eine gebrochene p-adische Zahl, so liefert die Auflösung der quadratischen Gleichung:

$$x^2 - \frac{a_0}{p^b}x + \bar{b} = 0 \qquad x = \frac{a_0 \pm \sqrt{a_0^2 - 4p^b\bar{b}}}{2p^b},$$

und die Zahl $\Delta_0 = a_0^2 - 4p^b\bar{b}$ ist stets eine von Null verschiedene p-adische Quadratzahl, da für ein ungerades p bzw. für $p=2$

$$\Delta \equiv a_0^2 \pmod{p} \quad \text{bzw.} \quad \Delta \equiv 1 \pmod{8}$$

ist. Eine solche Gleichung würde also in dem Körper $K(\mathfrak{p}) = K(p, \delta)$ zwei voneinander verschiedene rationale p-adische Wurzeln besitzen, was unmöglich ist.

Im folgenden soll stets das Produkt der für die Stelle $\mathfrak{p}$ zu α konjugierten Zahlen, d. h. entweder α selbst oder $\alpha\alpha' = \bar{b} = a^2 - Db^2$, *die Norm von α für die Stelle* $\mathfrak{p}$ genannt und durch $n_{\mathfrak{p}}(\alpha)$ bezeichnet werden. Es ist also in jenen beiden Fällen

$$(2.) \qquad n_{\mathfrak{p}}(\alpha) = a + bd \qquad \text{oder} \qquad n_{\mathfrak{p}}(\alpha) = a^2 - Db^2,$$

und wir können die soeben bewiesene Tatsache in dem Satze aussprechen:

> Eine Zahl α ist stets und nur dann für eine Stelle $\mathfrak{p}$ eine ganze algebraische Zahl, wenn ihre Norm für jene Stelle eine ganze rationale Zahl ist.

Aus diesem Satze fließt nun eine Fülle von Folgerungen, welche für den Fall einer Stelle erster Ordnung mit den entsprechenden Sätzen für die rationalen p-adischen Zahlen übereinstimmen, und die uns in beiden Fällen sofort zu einer naturgemäßen Darstellung aller Zahlen α für eine Stelle $\mathfrak{p}$ führen.

I. Von zwei Zahlen α und $\frac{1}{\alpha}$ ist mindestens eine für die Stelle $\mathfrak{p}$ ganz.

Denn entweder ist ja $n_{\mathfrak{p}}(\alpha)$ oder $\frac{1}{n_{\mathfrak{p}}(\alpha)}$ eine ganze Zahl.

II. Sind sowohl ε als $\frac{1}{\varepsilon}$ ganz, so nenne ich ε *eine Einheit für die Stelle* $\mathfrak{p}$.

Eine Zahl $\varepsilon = e + e'\delta$ ist also stets und nur dann eine algebraische Einheit für eine Stelle zweiter Ordnung $\mathfrak{p}$, wenn $n_{\mathfrak{p}}(\varepsilon) = e^2 - De'^2$ eine rationale Einheit ist. Einheiten sollen stets durch ε bezeichnet werden.

III. Das Produkt mehrerer Einheiten und der Quotient zweier Einheiten ist wieder eine Einheit.

Denn sind $n_{\mathfrak{p}}(\varepsilon)$ und $n_{\mathfrak{p}}(\varepsilon')$ rationale Einheiten, so gilt ja dasselbe für $n_{\mathfrak{p}}(\varepsilon\varepsilon')$ und $n_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)$.

IV. Eine Zahl α heißt durch eine andere β für $\mathfrak{p}$ algebraisch teilbar, wenn $\frac{\alpha}{\beta}$ ganz, wenn also $n_{\mathfrak{p}}(\alpha)$ durch $n_{\mathfrak{p}}(\beta)$ teilbar ist.

Da von den beiden Zahlen $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\beta}{\alpha}$ nach (I.) mindestens eine ganz ist, so folgt weiter:

V. Von zwei Zahlen α und β ist mindestens eine durch die andere teilbar, und zwar ist α durch β teilbar, wenn $n_\mathfrak{p}(\beta)$ von nicht höherer Ordnung als $n_\mathfrak{p}(\alpha)$ ist.

VI. Ist sowohl α durch β als auch β durch α teilbar und also $n_\mathfrak{p}(\alpha)$ und $n_\mathfrak{p}(\beta)$ von gleicher Ordnung, so heißen α und β *äquivalent.* In diesem und nur in diesem Falle ist $\beta = \alpha\varepsilon$, wo $\varepsilon = \frac{\beta}{\alpha}$ eine Einheit ist.

VII. Jede ganze Zahl ist durch jede Einheit teilbar, und umgekehrt ist eine ganze Zahl ε, die in jeder ganzen Zahl α enthalten ist, stets eine Einheit.

VIII. Die Summe, die Differenz und das Produkt zweier ganzen Zahlen ist wieder eine ganze Zahl, d. h. die für eine Stelle $\mathfrak{p}$ ganzen Zahlen bilden einen Ring.

Für das Produkt von zwei ganzen Zahlen α und β ist dies evident, da $n_\mathfrak{p}(\alpha\beta) = n_\mathfrak{p}(\alpha)n_\mathfrak{p}(\beta)$ ist. Um dasselbe für die Summe und die Differenz zu beweisen, nehme ich, was nach (IV.) erlaubt ist, an, daß β durch α teilbar ist, und setze:

$$\alpha \pm \beta = \alpha\left(1 \pm \frac{\beta}{\alpha}\right) = \alpha(1 \pm \gamma),$$

wo $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ ganz ist. Nun zeigt man aber leicht, daß für jede ganze Zahl γ auch $1 \pm \gamma$ ganz ist. Dies ist für eine Stelle erster Ordnung evident. Für eine Stelle zweiter Ordnung sei $x^2 - \bar{a}x + \bar{b} = (x-\gamma)(x-\gamma') = 0$ die Gleichung für γ, deren Koeffizienten $\bar{a}$ und $\bar{b}$ nach dem vorigen ganz sind. Dann folgt aus ihr für $x = \pm 1$, daß:

$$(1 \mp \gamma)(1 \mp \gamma') = n_\mathfrak{p}(1 \mp \gamma) = 1 \mp \bar{a} + \bar{b}$$

ebenfalls ganz ist. Also ist auch $n_\mathfrak{p}(\alpha \mp \beta) = n_\mathfrak{p}(\alpha(1 \mp \gamma))$ ganz, w. z. b. w.

Ich betrachte jetzt speziell den Ring aller für die Stelle $\mathfrak{p}$ *ganzen* Zahlen. Dieselben sind Einheiten oder Nichteinheiten, je nachdem ihre Normen Einheiten oder durch p teilbar sind. Unter den letzteren muß es mindestens eine geben, welche durch π bezeichnet werden mag, für welche $n_\mathfrak{p}(\pi)$ von positiver, aber möglichst kleiner Ordnung ist. Eine solche Zahl heiße *eine Primzahl für die Stelle* $\mathfrak{p}$. Jede andere Primzahl $\bar{\pi}$

ist dann äquivalent π, d. h. gleich $\varepsilon\pi$, wo ε eine Einheit ist. Da $n_{\mathfrak{p}}(p)$ gleich p oder gleich p^2 ist, je nachdem $\mathfrak{p}$ von der ersten oder zweiten Ordnung ist, so ist im ersten Falle stets $\pi = p$, im zweiten Falle gilt stets und nur dann dasselbe, wenn es keine Zahl π gibt, für welche $n(\pi)$ genau durch die erste Potenz von p teilbar ist. Wann die eine oder die andere Möglichkeit eintritt, wird gleich für jede Stelle einfach entschieden werden.

Ist nun π eine solche Primzahl und α eine beliebige ganze Zahl, so ist nach (V.) α entweder eine Einheit, oder es ist $\alpha = \alpha'\pi$, wo α' eine ganze Zahl ist, deren Norm von niedrigerer Ordnung ist als die von α. Durch analoges Weiterschließen ergibt sich so, daß jede ganze Zahl $\alpha = \varepsilon\pi^{\varrho}$ ist, wo ε eine Einheit und ϱ eine nicht negative ganze Zahl ist. Ebenso ist jede gebrochene Zahl γ nach (I.) in der Form $\frac{1}{\alpha}$ darstellbar, wo α ganz ist, also ist auch für sie $\gamma = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\varepsilon}\pi^{-\varrho} = \bar{\varepsilon}\pi^{-\varrho}$, und es ergibt sich der allgemeine Satz:

> Jede ganze oder gebrochene Zahl α ist auf eine einzige Weise in der Form $\varepsilon\pi^{\varrho}$ darstellbar, wo ε eine Einheit, ϱ eine ganze Zahl ist, welche *die Ordnungszahl von α für* die Stelle $\mathfrak{p}$ genannt wird.

Hieraus folgt sofort, daß die Ordnungszahl eines Produktes bzw. eines Quotienten gleich der Summe bzw. der Differenz der Ordnungszahlen der Komponenten ist.

Es ist jetzt leicht, für eine beliebige Stelle $\mathfrak{p}$ eine zugehörige Primzahl π zu bestimmen: Ist nämlich $\mathfrak{p}$ von der ersten Ordnung, so ist ja stets $\pi = p$. Ist dagegen $\mathfrak{p}$ von der zweiten Ordnung, und ist p einer der Teiler von D, so ist $\pi = \delta = \sqrt{D}$, weil $n(\delta) = -D$ die Primzahl p nur einmal enthält. Ist außerdem $p = 2$ und $D = 4n + 3$, so ist $\pi = 1 - \delta$, weil ja $n(1-\delta) = 1 - D$ genau durch 2 teilbar ist. In allen anderen Fällen aber ist $\pi = p$. Ist nämlich p ungerade, kein Teiler von D, und ist $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$, so ist $n(\alpha) = n(a + b\delta) = a^2 - Db^2$ nur dann durch p teilbar, wenn a und b p enthalten, wenn also diese Norm mindestens p^2 enthält; denn sonst wäre ja $D \equiv \left(\frac{a}{b}\right)^2 \pmod{p}$ also $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$. Ebenso leicht erkennt man, daß für $p = 2$, $D = 8n + 5$ $\pi = 2$ sein muß, denn in diesem Falle ist ja

$$n(\alpha) = n\left(a + b \cdot \frac{1+\delta}{2}\right) = a^2 + ab + b^2\frac{1-D}{4} \equiv a^2 + ab + b^2 \pmod{2}$$

dann und nur dann durch 2 teilbar, wenn a und b beide gerade, wenn also $n(\alpha)$ mindestens durch 4 teilbar ist. Es ergibt sich also der Satz:

Die zu einer Stelle $\mathfrak{p}$ gehörige Primzahl π ist allein dann nicht gleich p, wenn p ein Teiler von D oder wenn $p = 2$ und $D = 4n + 3$ ist. In diesen Ausnahmefällen ist $\pi = \delta$ bzw. $\pi = 1 - \delta$.

Führen wir statt D die Körperdiskriminante Δ ein, so kann derselbe Satz so ausgesprochen werden:

Die zu einer Stelle $\mathfrak{p}$ gehörige Primzahl π ist stets und nur dann nicht gleich p, wenn p ein Diskriminantenteiler ist.

Ich nenne eine nicht in Δ enthaltene Primzahl p eine *Primzahl erster* oder *zweiter Art*, je nachdem $\left(\frac{\Delta}{p}\right)$ gleich $+1$ oder -1 ist. Jeder Diskriminantenteiler soll *eine Primzahl dritter Art* heißen.

Wir wollen jetzt ein vollständiges Restsystem für alle ganzen Zahlen modulo π bestimmen. Um hier das einfache Resultat auch einfach aussprechen zu können, wollen wir die in $n_{\mathfrak{p}}(\pi)$ enthaltene Potenz von p im folgenden durch $n(\mathfrak{p})$ bezeichnen. Dann kann der hier sich ergebende Satz folgendermaßen ausgesprochen werden:

Die Anzahl aller modulo π inkongruenten ganzen Zahlen ist stets gleich $n(\mathfrak{p})$.

In der Tat, ist $\mathfrak{p}$ eine Stelle erster Ordnung, also $\pi = p$ und $n(\mathfrak{p}) = p$, so bilden ja die p Zahlen $0, 1, \ldots p-1$ ein vollständiges Restsystem modulo p. Ist dagegen $\mathfrak{p}$ von der zweiten Ordnung, und ist zuerst $\pi = p$, also $n(\mathfrak{p}) = n_{\mathfrak{p}}(p) = p^2$, so bilden ja die p^2 Zahlen $a_0 + b_0\xi$ für $a_0, b_0 = 0, 1, \ldots p-1$ ein Restsystem modulo p. Ist endlich p ein Diskriminantenteiler, also $\pi = \delta$ bzw. $\pi = 1 - \delta$ und $n(\mathfrak{p}) = p$, so ist jede ganze Zahl $a + b\delta$ modulo π kongruent der rationalen Zahl a bzw. $a + b$, d. h. auch hier bilden $(0, 1, \ldots p-1)$ ein vollständiges Restsystem.

Hiernach kann jede ganze Zahl α des Körpers $K(\mathfrak{p})$ in der Form $\alpha = \varepsilon^{(0)} + \pi\alpha^{(1)}$ dargestellt werden, wo $\varepsilon^{(0)}$ eine der $n(\mathfrak{p})$ Zahlen des Restsystems modulo π und $\alpha^{(1)}$ eine neue ganze Zahl bedeutet. Behandelt man also $\alpha^{(1)}$ in derselben Weise und fährt so fort, so erhält man genau wie a. S. 58 die folgende Darstellung von α für die Stelle $\mathfrak{p}$:

$$\alpha = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}\pi + \varepsilon^{(2)}\pi^2 + \cdots + \varepsilon^{(k)}\pi^k + \alpha^{(k+1)}\pi^{k+1},$$

wo die $\varepsilon^{(i)}$ eindeutig bestimmte Zahlen des Restsystems und $\alpha^{(k+1)}$ eine für $\mathfrak{p}$ ganze Zahl des Körpers bedeutet.

Jede ganze und offenbar auch jede gebrochene Zahl $\alpha = a + b\delta$ läßt sich also für den Bereich einer jeden Stelle $\mathfrak{p}$ eindeutig als eine nach ganzen Potenzen der zugehörigen Primzahl π fortschreitende unendliche Reihe

$$\alpha = \varepsilon^{(r)}\pi^r + \varepsilon^{(r+1)}\pi^{r+1} + \cdots \qquad (\mathfrak{p})$$

darstellen, deren Koeffizienten eindeutig bestimmte Zahlen des Restsystemes modulo π sind, welche beliebig weit berechnet werden können. Eine solche Zahl ist stets und nur dann für den Bereich von $\mathfrak{p}$ Null, wenn alle Koeffizienten verschwinden.

Ich führe jetzt diese Reihen als *π-adische Zahlen* ebenso in die Rechnung ein, wie vorher die p-adischen oder die g-adischen Zahlen, unterscheide wie vorher die reduzierten von den nicht reduzierten Zahlen, in welchen die Koeffizienten $\varepsilon^{(i)}$ beliebige ganze Zahlen sind, definiere ebenso die Kongruenz von zwei solchen Zahlen modulo π^k und nenne endlich zwei solche π-adische Zahlen *gleich*, wenn sie für jede noch so hohe Potenz von π kongruent sind. Endlich folgt dann, daß für die Summe und das Produkt von zwei Zahlen

$$\alpha = \varepsilon^{(r)}\pi^r + \varepsilon^{(r+1)}\pi^{r+1} + \cdots, \quad \beta = \xi^{(s)}\pi^s + \xi^{(s+1)}\pi^{s+1} + \cdots$$

die Gleichungen

$$\alpha + \beta = (\varepsilon^{(r)} + \xi^{(r)})\pi^r + \cdots,$$
$$\alpha\beta = (\varepsilon^{(r)}\xi^{(s)}\pi^{r+s} + (\varepsilon^{(r)}\xi^{(s+1)} + \varepsilon^{(r+1)}\xi^{(s)})\pi^{r+s+1} + \cdots$$

bestehen.

Jeder Stelle $\mathfrak{p}$ ordne ich nun einen gleichbezeichneten Primteiler $\mathfrak{p}$ zu, und sage, eine algebraische Zahl $\alpha = a + b\delta$ ist durch $\mathfrak{p}^h$ genau teilbar, wenn der Wert von α für die Stelle $\mathfrak{p}$ die Ordnungszahl h besitzt, wenn also die zugehörige Potenzreihe genau mit π^h beginnt. Ist $\mathfrak{q}$ eine andere Stelle, so heißt α genau durch $\mathfrak{p}^h\mathfrak{q}^k$ teilbar, wenn sie genau durch $\mathfrak{p}^h$ und durch $\mathfrak{q}^k$ teilbar ist usw. Auf diese Weise ergibt sich leicht, daß jeder Zahl α des Körpers eindeutig ein Divisor $\mathfrak{d}_\alpha$ zugeordnet ist, was wir durch die Äquivalenz $\alpha \sim \mathfrak{d}_\alpha$ ausdrücken können. Die Äquivalenz

$$\alpha \sim \mathfrak{d}_\alpha = \mathfrak{p}^h\mathfrak{p}'^{h'}\mathfrak{q}^k \cdots \mathfrak{r}^l$$

besagt dann, daß α an den Stellen $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{q}, \ldots \mathfrak{r}$ bzw. die Ordnungszahlen $h, h', k, \ldots l$ besitzt, während sie an allen übrigen Stellen eine Einheit ist. Ist endlich $\alpha \sim \mathfrak{d}_\alpha$, $\beta \sim \mathfrak{d}_\beta$, so ergibt sich sofort, daß $\alpha\beta \sim \mathfrak{d}_\alpha\mathfrak{d}_\beta$, $\frac{\alpha}{\beta} \sim \frac{\mathfrak{d}_\alpha}{\mathfrak{d}_\beta}$ ist, wenn das Produkt und der Quotient zweier Divisoren wie in der elementaren Zahlenlehre definiert wird.

Abschätzung der Lösung der *Pell*schen Gleichung.

Von Herrn *Oskar Perron* in Tübingen.

In Band 143 dieses Journals hat Herr *Remak* den *Dirichlet*schen Beweis für die Lösbarkeit der *Pell*schen Gleichung

$$x^2 - Dy^2 = 1 \tag{1.}$$

derart ausgestaltet, daß sich eine obere Grenze für das kleinste positive Lösungspaar x, y ergibt. Herr *Remak* findet:

$$x < (g+1)^{2g^3+1}, \quad y \leq (g+1)^{2g^3},$$

wo g die größte in $2\sqrt{D}$ enthaltene ganze Zahl ist. Die Bedeutung der *Remak*schen Untersuchung liegt in dem Nachweis, daß die *Dirichlet*sche Methode überhaupt eine verhältnismäßig einfache Abschätzung gestattet. Sieht man aber von dieser prinzipiellen Bedeutung ab und stellt sich nur die Aufgabe, eine obere Grenze für die kleinste positive Lösung der *Pell*schen Gleichung zu ermitteln, so wird man die Theorie der Kettenbrüche zu Hilfe nehmen, weil diese die Lösung explizit liefert. In der Tat wird sich so die sehr viel bessere Abschätzung

$$x < 2(b+1)^4 (\tfrac{2}{3}b+1)^{2b(b+1)-4}, \quad y < 2(b+1)^3 (\tfrac{2}{3}b+1)^{2b(b+1)-4}$$

ergeben, wo b die größte in $\sqrt{D}$ enthaltene ganze Zahl ist.

Entwickelt man $\sqrt{D}$ in einen regelmäßigen Kettenbruch, so erhält man*):

*) Vergl. des Verfassers Buch: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, §§ 24, 25. Im folgenden zitiert mit „Lehrbuch“.

$$\sqrt{D} = [b, \overline{b_1, b_2, \ldots b_{k-1}, 2b}] \qquad (b_{k-\nu} = b_\nu),$$

wo übrigens auch $k = 1$ sein kann. Bezeichnet man mit A_ν, B_ν den Näherungszähler und -nenner ν-ter Ordnung, so folgt aus den bekannten Rekursionsformeln, wenn zunächst $k > 1$ angenommen wird, ohne Schwierigkeit:

$$A_{k-1} < (b+1)(b_1+1)\cdots(b_{k-1}+1), \quad B_{k-1} < (b_1+1)(b_2+1)\cdots(b_{k-1}+1).$$

Aber die Zahlen $b_1, b_2, \ldots b_{k-1}$ sind nach Lehrbuch, Seite 94, Satz 14, alle $\leqq b$, und mit ***höchstens einer*** Ausnahme sogar $< \frac{2}{3}b$. Daher wird

$$(2.) \quad A_{k-1} < (b+1)^2 (\tfrac{2}{3}b+1)^{k-2}, \quad B_{k-1} < (b+1)(\tfrac{2}{3}b+1)^{k-2}.$$

Das gilt offenbar auch noch, wenn $k = 1$ sein sollte.

Nach Lehrbuch, Seite 103 ist nun

$$A_{k-1}^2 - DB_{k-1}^2 = (-1)^k;$$

setzt man also

$$(A_{k-1} + B_{k-1}\sqrt{D})^2 = x + y\sqrt{D},$$

so ist x, y eine Lösung der *Pell*schen Gleichung (wenn keine gerade Zahl, so ist schon A_{k-1}, B_{k-1} eine Lösung). Nun ist unter Berücksichtigung von (2.)

$$(3.) \quad \begin{cases} x = A_{k-1}^2 + DB_{k-1}^2 < A_{k-1}^2 + (b+1)^2 B_{k-1}^2 < 2(b+1)^4 (\tfrac{2}{3}b+1)^{2k-4}, \\ y = 2A_{k-1}B_{k-1} < 2(b+1)^3 (\tfrac{2}{3}b+1)^{2k-4}. \end{cases}$$

Jetzt braucht nur noch die Zahl k, d. h. die Gliederzahl der primitiven Periode abgeschätzt zu werden. Nach Lehrbuch, Seite 77 ist $k \leqq 2b^2$. Man findet aber leicht eine kleinere Schranke. Denn die durch die Gleichungen

$$\sqrt{D} = b + \frac{1}{\xi_1}, \ \xi_1 = b_1 + \frac{1}{\xi_2}, \ \ldots \ \xi_{k-1} = b_{k-1} + \frac{1}{\xi_k}$$

definierten vollständigen Quotienten haben nach Lehrbuch, Seite 93, die Form

$$\xi_\nu = \frac{\sqrt{D} + P_\nu}{Q_\nu} \qquad (P_\nu, Q_\nu \text{ positive ganze Zahlen})$$

und sind ***reduzierte*** Zahlen; d. h. es ist

$$\frac{\sqrt{D}+P_\nu}{Q_\nu} > 1, \ 0 > \frac{-\sqrt{D}+P_\nu}{Q_\nu} > -1.$$

Hieraus folgt sofort:

$$P_\nu < \sqrt{D}, \quad \sqrt{D} - P_\nu < Q_\nu < \sqrt{D} + P_\nu;$$

also auch:

$$P_\nu \leqq b, \ b - P_\nu < Q_\nu \leqq b + P_\nu.$$

Es sind daher nur b verschiedene Werte für P_ν möglich, und zu jedem P_ν

wieder höchstens $2P_\nu$ verschiedene Werte für Q_ν. Die Gesamtzahl der möglichen Wertepaare P_ν, Q_ν ist somit höchstens gleich*)

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2b = b(b+1).$$

Es gibt also höchstens $b(b+1)$ verschiedene vollständige Quotienten $\frac{\sqrt{D}+P_\nu}{Q_\nu}$; daher ist $k \leqq b(b+1)$. Setzt man das in (3.) ein, so erhält man gerade die zu beweisenden Formeln.

---

*) Die Anzahl läßt sich noch weiter reduzieren, weil Q_ν ein Teiler von $D-P_\nu^2$ sein muß (Lehrbuch, Seite 75). Doch wollen wir darauf nicht mehr eingehen.

Preisausschreiben

anläßlich des VI. internationalen Mathematikerkongresses in Stockholm.

Auf dem fünften internationalen Mathematikerkongreß in Cambridge wurde beschlossen, daß der sechste Kongreß in Stockholm im Jahre 1916 zusammentreten sollte. Se. Majestät König Gustav V ließ bei dieser Gelegenheit mitteilen, daß er geruhte, das Protektorat über diesen Kongreß zu übernehmen.

Im Anschluß hieran hat Se. Majestät beschlossen als Preis für eine bedeutende Entdeckung innerhalb der Theorie der analytischen Funktionen eine goldene Medaille mit dem Bildnis *Karl Weierstraß'* nebst einer Geldsumme von 3000 Kronen auszuteilen.

Bewerber um diesen Preis haben ihre Abhandlungen an den Hauptredakteur der *Acta Mathematica* vor dem 31. Oktober 1915, der hundertjährigen Wiederkehr des Geburtstages *Karl Weierstraß'*, einzusenden. Die Abhandlungen, die einen Gegenstand entweder innerhalb der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen oder innerhalb der Theorie einer speziellen besonders wichtigen Funktionenklasse behandeln können, sind mit einem Motto sowie Namen und Adresse des Verfassers — entweder offen angegeben oder in versiegeltem Umschlag — zu versehen und dürfen nicht zuvor veröffentlicht worden sein.

Se. Majestät hat bestimmt, daß ein Bericht über den Inhalt der Abhandlungen mit einer Beurteilung ihrer wissenschaftlichen Bedeutung zum Anhalt Sr. Majestät von den Mitgliedern der ersten Klasse der Schwedischen Akademie der Wissenschaften zu erstatten ist. Die Mitglieder dieser Klasse sind gegenwärtig: die Herren *Mittag-Leffler*, *Falk*, *Phragmén*, *Wiman*, *Bendixson* und *von Koch*. Außerdem wird ihnen Herr *Fredholm* adjungiert werden.

Die preisgekrönte Abhandlung sowie auch die Abhandlungen, die sonst als besonders bedeutend einer Auszeichnung würdig befunden werden, erscheinen in den *Acta Mathematica* und dürfen nicht vorher auf andere Weise veröffentlicht werden. Die übrigen Abhandlungen werden unter der für diesen Zweck angegebenen Adresse zurückgesandt.

Die Abhandlungen können nach Wahl des Verfassers in deutscher, englischer oder französischer Sprache abgefaßt sein.

Zwei Sätze über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln.

Von Herrn *J. Schur* in Bonn.

Man verdankt Herrn *E. Malo**) folgenden interessanten Satz: *Sind die Wurzeln der Gleichung*

$$(1.) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m = 0 \qquad (a_m \neq 0)$$

sämtlich reell und die der Gleichung

$$(2.) \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n = 0 \qquad (b_n \neq 0)$$

*sämtlich reell und von gleichem Vorzeichen***), *so besitzt, wenn k die kleinere der beiden Zahlen m und n bedeutet, auch die Gleichung*

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \cdots + a_k b_k x^k = 0$$

keine imaginäre Wurzel. Ist $m \leqq n$ und $a_0 b_0 \neq 0$, so sind die Wurzeln dieser Gleichung voneinander verschieden.

Ich werde im folgenden unter Benutzung eines von Herrn *Malo* angewandten Kunstgriffs einen ähnlich gearteten *Kompositionssatz* beweisen, der von größerer Tragweite zu sein scheint, und aus dem sich der *Malo*sche Satz leicht folgern läßt. Dieser Satz lautet:

I. *Sind die Wurzeln der Gleichung* (1.) *sämtlich reell und die der Gleichung* (2.) *sämtlich reell und von gleichem Vorzeichen, so besitzt, wenn k die kleinere der beiden Zahlen m und n bedeutet, auch die Gleichung*

---

*) Note sur les équations algébriques dont toutes les racines sont réelles, Journal de Mathématiques spéciales, série 4, t. 4 (1895), p. 7.

**) Hierunter ist zu verstehen, daß die von Null verschiedenen Wurzeln entweder sämtlich positiv oder sämtlich negativ sein sollen. — Die Koeffizienten der in dieser Arbeit vorkommenden Polynome sind stets als reell anzunehmen.

$$a_0 b_0 + 1!\, a_1 b_1 x + 2!\, a_2 b_2 x^2 + \cdots + k!\, a_k b_k x^k = 0$$

keine imaginäre Wurzel. Ist $m \leqq n$ *und* $a_0 b_0 \neq 0$, *so sind die Wurzeln dieser Gleichung voneinander verschieden.*

Der Beweis dieses Satzes wird in § 1 und § 2 erbracht. In § 3 werde ich den *Malo*schen Satz und eine Verallgemeinerung dieses Satzes beweisen.

Bei der Untersuchung einer mit dem Satz I zusammenhängenden Frage bin ich noch auf folgenden Satz geführt worden, der ebenfalls verschiedene Anwendungen zuläßt (vergl. § 5):

II. *Gegeben sei eine algebraische Gleichung n-ten Grades* $f(x) = 0$, *deren Wurzeln sämtlich reell sind. Die größte Wurzel dieser Gleichung sei* x_n, *ferner sei* x_{n-r} *die größte unter den Wurzeln der r-ten derivierten Gleichung* $f^{(r)}(x) = 0$, *so daß also (nach dem Rolleschen Theorem)*

$$x_n \geqq x_{n-1} \geqq x_{n-2} \geqq \cdots \geqq x_1$$

wird. Es ist dann

$$x_n - x_{n-1} \leqq x_{n-1} - x_{n-2} \leqq \cdots \leqq x_2 - x_1 .$$

§ 1.

Dem Beweise des Satzes I schicke ich einige Hilfssätze voraus, die zwar längst bekannt sind, aber der Vollständigkeit wegen ausführlich bewiesen werden sollen.

Hilfssatz I. *Ist*

$$h(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0 \quad (c_n \neq 0)$$

eine Gleichung mit lauter reellen Wurzeln, in der c_0 *von Null verschieden ist, so können nicht zwei aufeinanderfolgende Koeffizienten der Gleichung verschwinden. Ist genauer* $c_r (0 < r < n)$ *gleich Null, so muß* $c_{r-1}\, c_{r+1} < 0$ *sein.*

Ist nämlich

$$h(x) = c_0 \prod_{r=1}^{n} (1 + \gamma_r x),$$

so wird

$$c_1^2 - 2\, c_0\, c_2 = c_0^2\, (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \cdots + \gamma_n^2),$$

also ist

$$D_1 = c_1^2 - 2\, c_0 c_2 > 0. \tag{3.}$$

Beachtet man, daß für jedes r

$$h^{(r-1)}(x) = (r-1)!\, c_{r-1} + \frac{r!}{1!}\, c_r x + \frac{(r+1)!}{2!}\, c_{r+1} x^2 + \cdots = 0$$

ebenfalls nur reelle Wurzeln hat, so erkennt man ebenso, daß, wenn c_{r-1} nicht Null ist,

$$D_r = r\,c_r^2 - (r+1)\,c_{r-1}\,c_{r+1} > 0$$

wird. Ist nun $c_1 = 0$, so folgt aus $D_1 > 0$, daß $c_0 c_2 < 0$ wird. Insbesondere können nicht c_1 und c_2 gleichzeitig verschwinden. Ist ferner $c_2 = 0$, so muß c_1 von Null verschieden sein; folglich ist $D_2 > 0$ und also $c_1 c_3 < 0$. Indem man diese Schlußweise fortsetzt, erkennt man die Richtigkeit unserer Behauptung.

Hilfssatz II. *Es sei*

$$h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = 0 \quad (c_0 \neq 0,\ c_n \neq 0)$$

eine Gleichung mit lauter reellen Wurzeln. Dann besitzt, wenn $f(x)$ irgend ein Polynom ohne imaginäre Nullstellen ist, auch die Gleichung

$$F(x) = c_0 f(x) + c_1 f'(x) + c_2 f''(x) + \cdots + c_n f^{(n)}(x) = 0$$

*lauter reelle Wurzeln. Ferner ist jede mehrfache Wurzel α dieser Gleichung zugleich auch eine mehrfache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$**).

Ist nämlich

$$h(x) = c_0 \prod_{r=1}^{n} (1 + \gamma_r x),$$

und setzt man

$$f_1 = f + \gamma_1 f',\ f_2 = f_1 + \gamma_2 f_1',\ \cdots\ f_n = f_{n-1} + \gamma_n f_{n-1}',$$

so wird $F = c_0 f_n$, und man erkennt nun leicht, daß es genügt, den Satz nur für den Fall einer linearen Funktion

$$h(x) = 1 + \gamma x$$

zu beweisen. Man betrachte nun die Funktion $\varphi(x) = e^{\frac{x}{\gamma}} f(x)$, deren Ableitung

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\gamma} e^{\frac{x}{\gamma}} \{f(x) + \gamma f'(x)\}$$

ist. Ist $f(x)$ vom Grade m, so besitzt nach dem *Rolle*schen Theorem die Gleichung $\varphi'(x) = 0$, und folglich auch die Gleichung

$$F(x) = f(x) + \gamma f'(x) = 0$$

mindestens $m - 1$ reelle Wurzeln. Da aber der Grad dieser Gleichung gleich m ist, so müssen sämtliche m Wurzeln reell sein. Ist ferner

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - \alpha) + a_2 (x - \alpha)^2 + \cdots + a_m (x - \alpha)^m,$$

so wird

$$F(\alpha) = a_0 + \gamma a_1 + (a_1 + 2\gamma a_2)(x - \alpha) + \cdots.$$

Soll nun α eine mehrfache Wurzel von $F(x) = 0$ sein, so wird

---

*) Vgl. z. B. *Netto*, Vorlesungen über Algebra, Bd. I, S. 212.

(4.) $$a_0 + \gamma a_1 = 0, \quad a_1 + 2\gamma a_2 = 0,$$

und also $a_1^2 - 2a_0a_2 = 0$. Diese Gleichung ist, wenn a_0 von Null verschieden ist, nicht möglich, da in diesem Falle $a_1^2 - 2a_0a_2 > 0$ ist (vergl. Formel (3.)). Es muß folglich $a_0 = 0$ und wegen (4.) auch $a_1 = a_2 = 0$ sein. Daher ist α in der Tat eine mehrfache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$.

Hilfssatz III. *Man habe eine Folge von Gleichungen*

$$f_n(x) = a_{n0} + a_{n1}x + \cdots + a_{nm}x^m = 0,$$

deren Wurzeln sämtlich reell sind. Existieren dann die Grenzwerte

$$\lim_{n=\infty} a_{n\mu} = a_\mu, \qquad (\mu = 0, 1, \ldots m)$$

so besitzt auch die Gleichung

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m = 0$$

nur reelle Wurzeln.

Es ist nämlich in jedem endlichen Bereich der x-Ebene gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x).$$

Wäre nun x_0 eine imaginäre Nullstelle der Funktion $f(x)$, so müßten nach einem bekannten Satze der Funktionentheorie*) die Funktionen $f_n(x)$ in jedem Kreise $|x - x_0| \leqq \varrho$, sobald n einen gewissen Wert übersteigt, Nullstellen besitzen. Dies ist aber gewiß nicht der Fall, wenn der Kreis so klein gewählt wird, daß er mit der reellen Achse keinen Punkt gemeinsam hat.

§ 2.

Der Satz I soll zunächst unter der Voraussetzung bewiesen werden, daß in den beiden zu betrachtenden Gleichungen (1.) und (2.)

$$a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0, \quad m \leqq n$$

ist. Es genügt ferner anzunehmen, daß

$$a_m > 0, \quad b_n > 0$$

ist und daß die Wurzeln der Gleichung (2.) sämtlich negativ, die Koeffizienten $b_0, b_1, \ldots$ also positiv sind.

Ist nun z eine beliebige reelle Zahl, so besitzt die Gleichung

$$F(x) = b_0f(x) + b_1z \cdot f'(x) + b_2z^2f''(x) + \cdots + b_mz^mf^{(m)}(x) = 0$$

nach Hilfssatz II lauter reelle Wurzeln. Setzt man

$$F(x) = P_0(z) + \frac{P_1(z)}{1!}x + \frac{P_2(z)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{P_m(z)}{m!}x^m,$$

*) Vgl. *A. Hurwitz*, Über die Nullstellen der *Bessel*schen Funktion, Math. Ann. Bd. XXXIII, S. 247.

so wird

$$P_0(z) = a_0 b_0 + 1!\, a_1 b_1 z + 2!\, a_2 b_2 z^2 + \cdots + m!\, a_m b_m z^m$$

und

$$P_\mu(z) = \mu!\, a_\mu b_0 + (\mu+1)!\, a_{\mu+1} b_1 z + \cdots + m!\, a_m b_{m-\mu} z^{m-\mu}.$$

Die Gleichungen $P_0(z) = 0$ und $P_1(z) = 0$ besitzen keine reelle Wurzel ξ gemeinsam. Denn wäre $P_0(\xi) = 0$, $P_1(\xi) = 0$, so würde $x = 0$ eine mehrfache Wurzel der Gleichung $F(x) = 0$ sein. Nach Hilfssatz II müßte $x = 0$ auch eine mehrfache Wurzel von $f(x) = 0$ sein. Dies ist aber gewiß nicht der Fall, da a_0 von Null verschieden sein soll.

Auf Grund des Hilfssatzes I und der Gleichung

$$P_m(z) = m!\, a_m b_0$$

ergibt sich ferner, daß die Reihe der Polynome

$$P_0(z), P_1(z), \ldots P_m(z) \tag{5.}$$

folgende Eigenschaften besitzt:

1. Das letzte Glied der Reihe ist eine von Null verschiedene Konstante.

2. Für einen reellen Wert $z = \xi$ verschwinden nicht zwei aufeinanderfolgende Glieder der Reihe.

3. Verschwindet für einen reellen Wert $z = \xi$ ein mittleres Glied der Reihe, so haben die beiden links und rechts benachbarten Glieder für dieses Argument entgegengesetzte Vorzeichen.

Die Polynome (5.) bilden also eine verallgemeinerte *Sturm*sche Reihe*). Bedeutet $V(z)$ die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe (5.), so ist also die Anzahl r der verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $P_0(z) = 0$ gleich

$$V(-\infty) - V(+\infty) + p,$$

wo p eine nicht negative ganze Zahl ist. Da nun aber $b_0, b_1, \ldots b_m$ und auch a_m positive Zahlen sein sollen, so ist

$$\operatorname{sign} P_\mu(-\infty) = (-1)^{m-\mu}, \quad \operatorname{sign} P_\mu(+\infty) = 1, \quad (\mu = 0, 1, \ldots m)$$

also

$$V(-\infty) = m, \quad V(+\infty) = 0.$$

Daher ist r mindestens gleich m, und da die Gleichung $P_0(z) = 0$ vom m-ten Grade ist, genau gleich m.

Hiermit ist der Satz I für den Fall $a_0 b_0 \neq 0$, $m \leqq n$ bewiesen.

Es sei nun $a_0 b_0 \neq 0$, aber $m > n$. Man betrachte dann an Stelle der Gleichung

*) Vgl. z. B. *Netto*, a. a. O., S. 238.

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n = 0$$

eine Gleichung der Form

$$(1 - \varepsilon x)^{m-n} g(x) = b_0(\varepsilon) + b_1(\varepsilon) x + \cdots + b_m(\varepsilon) x^m = 0,$$

wo ε eine von Null verschiedene reelle Zahl bedeutet, die dasselbe Vorzeichen wie die Wurzeln der Gleichung $g(x) = 0$ besitzt. Dann sind nach dem bereits Bewiesenen die Wurzeln von

$$a_0 b_0(\varepsilon) + 1!\ a_1 b_1(\varepsilon) x + \cdots + m!\ a_m b_m(\varepsilon) x^m = 0$$

sämtlich reell. Läßt man nun ε eine Folge von Zahlen durchlaufen, die gegen Null konvergieren, so wird

$$\lim b_0(\varepsilon) = b_0,\ \lim b_1(\varepsilon) = b_1, \ldots \lim b_n(\varepsilon) = b_n$$

und

$$\lim b_{m+1}(\varepsilon) = 0, \ldots \lim b_m(\varepsilon) = 0.$$

Aus dem Hilfssatz III folgt daher, daß auch die Gleichung

$$a_0 b_0 + 1!\ a_1 b_1 x + \cdots + n!\ a_n b_n x^n = 0$$

keine imaginäre Wurzel hat.

Um auch den Fall, daß eine der beiden Zahlen a_0 und b_0 verschwindet, zu erledigen, nehme ich an, es seien a_μ und b_ν die ersten nicht verschwindenden Koeffizienten in den Gleichungen (1.) und (2.). Ist dann

$$f(x) = x^\mu f_1(x),\ g(x) = x^\nu g_1(x),$$

so betrachte man, wenn ε wieder eine reelle Zahl bedeutet, die dasselbe Vorzeichen wie die nicht verschwindenden Wurzeln von $g(x) = 0$ hat, die Gleichungen

$$(x - \varepsilon)^\mu f_1(x) = a_0(\varepsilon) + a_1(\varepsilon) x + \cdots + a_m(\varepsilon) x^m = 0,$$
$$(x - \varepsilon)^\nu g_1(x) = b_0(\varepsilon) + b_1(\varepsilon) x + \cdots + b_n(\varepsilon) x^n = 0.$$

Da hier $a_0(\varepsilon)$ und $b_0(\varepsilon)$ nicht Null sind, so hat, wenn k die kleinere der beiden Zahlen m und n bedeutet, die Gleichung

$$a_0(\varepsilon) b_0(\varepsilon) + 1!\ a_1(\varepsilon) b_1(\varepsilon) x + \cdots + k!\ a_k(\varepsilon) b_k(\varepsilon) x^k = 0$$

lauter reelle Wurzeln. Läßt man ε gegen Null konvergieren, so erhält man die Gleichung

$$a_0 b_0 + 1!\ a_1 b_1 x + \cdots + k!\ a_k b_k x^k = 0,$$

deren Wurzeln wieder sämtlich reell sein müssen.

Der Satz I ist nun vollständig bewiesen.

Es gilt noch der weitere Satz:

I′. *Sind*

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m = 0\,,$$
$$b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m + b_{m+1} x^{m+1} + \cdots + b_n x^n = 0$$

zwei Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln, und sind die Zahlen

$$b_0, b_1, \ldots b_m$$

sämtlich positiv, so besitzt auch die Gleichung

$$a_0 b_0 + 1!\, a_1 b_1 x + \cdots + m!\, a_m b_m x^m = 0$$

nur reelle Wurzeln).*

Ist a_0 von Null verschieden, so ist der Beweis ebenso zu führen, wie beim Satze I für den Fall $m \leqq n$. Wir haben nämlich bei der Behandlung dieses Falles nur von der Annahme Gebrauch gemacht, daß die Wurzeln der beiden gegebenen Gleichungen reell und die Zahlen $b_0, b_1, \ldots b_m$ positiv sein sollen. Der Fall $a_0 = 0$ erledigt sich ähnlich wie früher durch einen Grenzübergang.

§ 3.

Um aus dem Satze I den *Malo*schen Satz zu erhalten, kann man folgendermaßen schließen: Zugleich mit der Gleichung

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m = 0 \qquad (6.)$$

besitzt auch die Gleichung

$$a_m + a_{m-1} x + \cdots + a_0 x^m = 0$$

nur reelle Wurzeln. Da die Wurzeln der Gleichung

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \cdots + x^m = 0$$

reell und negativ sind, so erkennt man auf Grund des Satzes I, daß auch die Gleichung

$$a_m + m\, a_{m-1} x + m(m-1)\, a_{m-2} x^2 + \cdots + m!\, a_0 x^m = 0$$

keine imaginäre Wurzel hat. Dividiert man durch $m!$ und ersetzt x durch $\frac{1}{x}$, so ergibt sich, daß, *wenn die Wurzeln der Gleichung* (6.) *sämtlich reell sind, dasselbe auch für die Gleichung*

$$a_0 + \frac{a_1}{1!} x + \frac{a_2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{a_m}{m!} x^m = 0$$

*gilt**).*

Wendet man nun auf diese Gleichung und die Gleichung

---

*) Man kann zeigen, daß der Satz auch dann gilt, wenn nur verlangt wird, daß $b_0, b_1, \ldots b_m$ nicht negative Zahlen sein sollen.

**) Vgl. *Laguerre*, *Œuvres*, t. I, p. 31 und p. 201.

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n = 0,$$

deren Wurzeln reell und von gleichem Vorzeichen sein sollen, den Satz I an, so erhält man den *Malo*schen Satz.

Eine ähnliche Betrachtung führt zu einem allgemeineren Satze:

Es seien

$$(7.) \qquad \begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m = 0, \\ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x_m = 0, \\ c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_m x^m = 0 \end{cases}$$

drei Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln, ferner seien die Wurzeln jeder der beiden letzten Gleichungen von gleichem Vorzeichen. Dann hat auch die Gleichung

$$(8.) \qquad \sum_{\mu=0}^{m} \frac{a_\mu b_\mu c_\mu}{\binom{m}{\mu}} x^\mu = 0$$

nur reelle Wurzeln.

Da nämlich auch die Wurzeln der Gleichungen

$$a_m + a_{m-1} x + a_{m-2} x^2 + \cdots + a_0 x^m = 0,$$
$$b_m + b_{m-1} x + b_{m-2} x^2 + \cdots + b_0 x^m = 0$$

sämtlich reell und die der zweiten Gleichung von gleichem Vorzeichen sind, so hat die Gleichung

$$a_m b_m + 1!\, a_{m-1} b_{m-1} x + 2!\, a_{m-2} b_{m-2} x^2 + \cdots + m!\, a_0 b_0 x^m = 0,$$

und folglich auch die Gleichung

$$m!\, a_0 b_0 + (m-1)!\, a_1 b_1 x + (m-2)!\, a_2 b_2 x^2 + \cdots + a_m b_m x^m = 0$$

keine imaginäre Wurzel. Wendet man auf diese Gleichung und die letzte der Gleichungen (7.) den Satz I an, so ergibt sich, daß die Wurzeln der Gleichung

$$\sum_{\mu=0}^{m} (m-\mu)!\, \mu!\, a_\mu b_\mu c_\mu x^\mu = 0$$

sämtlich reell sind. Dividiert man durch $m!$, so erhält man die Gleichung (8.).

§ 4.

Ich wende mich nun zum Beweis des Satzes II.

Es genügt offenbar, zu beweisen, daß

$$(9.) \qquad x_n - x_{n-1} \leqq x_{n-1} - x_{n-2}$$

ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß $x_{n-2} = 0$ ist. Ist nun auch $x_n = 0$, so wird wegen

$$x_{n-2} \leqq x_{n-1} \leqq x_n$$

x_{n-1} ebenfalls Null und die Relation (9.) ist gewiß richtig. Ist aber x_n von Null verschieden, so kann angenommen werden, daß $x_n = 1$ ist.

Wir haben also zu beweisen: Besitzt die Gleichung

$$f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_{n-1} x + c_n = 0 \qquad (n > 2)$$

lauter reelle Wurzeln, unter denen die größte gleich 1 ist, und ist die größte Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$ gleich 0, so ist die größte Wurzel x_{n-1} der Gleichung $f'(x) = 0$ mindestens gleich $\frac{1}{2}$.

Auf Grund der über $f''(x)$ gemachten Voraussetzung folgt

$$c_1 \geqq 0,\ c_2 \geqq 0, \ldots c_{n-3} \geqq 0,\ c_{n-2} = 0.$$

Wäre $x_{n-1} = 0$, so müßte $c_{n-1} = 0$ und auf Grund des Hilfssatzes I auch $c_n = 0$ sein. Dies ist nicht möglich, da alsdann alle Koeffizienten von $f(x) = 0$ positiv oder Null wären und $x_n = 1$ nicht eine Wurzel dieser Gleichung sein könnte. Daher hat $f'(x) = 0$ eine und nur eine positive Wurzel, nämlich die Wurzel x_{n-1}; folglich ist $f'(x)$ zwischen 0 und x_{n-1} negativ und rechts von x_{n-1} positiv. Wir haben daher nur zu beweisen, daß $f'(\frac{1}{2}) \leqq 0$ ist.

Aus

$$f(1) = 1 + c_1 + \cdots + c_{n-1} + c_n = 0,$$

$$f'(\tfrac{1}{2}) = \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n-1}{2^{n-2}} c_1 + \cdots + c_{n-1}$$

folgt nun

$$f'(\tfrac{1}{2}) = \left(\frac{n}{2^{n-1}} - 1\right) + c_1\left(\frac{n-1}{2^{n-2}} - 1\right) + \cdots + c_{n-3}\left(\frac{3}{4} - 1\right) - c_n.$$

Dies ist jedenfalls negativ, wenn $c_n \geqq 0$ ist. Wir haben also nur noch den Fall $c_n < 0$ zu behandeln. In diesem Fall ist $x_n = 1$ (nach der *Descartes*schen Regel) die einzige positive Wurzel von $f(x) = 0$. Bezeichnet man die übrigen Wurzeln mit $-\gamma_1, -\gamma_2, \ldots -\gamma_{n-1}$, so wird

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x+\gamma_1} + \cdots + \frac{1}{x+\gamma_{n-1}} + \frac{1}{x-1},$$

$$\frac{f'^2(x)}{f^2(x)} - \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{(x+\gamma_1)^2} + \cdots + \frac{1}{(x+\gamma_{n-1})^2} + \frac{1}{(x-1)^2},$$

also wegen $f''(0) = 0$

$$(10.) \qquad 1 + \frac{1}{\gamma_1^2} + \cdots + \frac{1}{\gamma_{n-1}^2} = \left(\frac{1}{\gamma_1} + \cdots + \frac{1}{\gamma_{n-1}} - 1\right)^2.$$

Da $f(\frac{1}{2})$ jedenfalls negativ ist, so ist nur zu zeigen, daß

$$\frac{f'(\frac{1}{2})}{f(\frac{1}{2})} = \frac{2}{1+2\gamma_1} + \cdots + \frac{2}{1+2\gamma_{n-1}} - 2 \geqq 0$$

ist. Setzt man $\alpha_\nu = \frac{1}{\gamma_\nu}$, so läßt sich diese Ungleichung in der Form

(11.) $$\sum_\nu \frac{\alpha_\nu}{2+\alpha_\nu} \geqq 1$$

und die Gleichung (10.) in der Form

(12.) $$\sum_\nu \alpha_\nu = \sum_{\mu<\nu} \alpha_\mu \alpha_\nu$$

schreiben.

Ich werde nun beweisen: *Genügen die positiven Zahlen* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ *der Gleichung* (12.), *so besteht die Ungleichung* (11.); *das Gleichheitszeichen gilt hier dann und nur dann, wenn*

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = \frac{2}{n-2}$$

ist.

Setzt man nämlich

$$a = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1},$$

so kann die Gleichung (12.) in der Form

(13.) $$\sum_\nu \alpha_\nu (a - \alpha_\nu - 2) = 0$$

und die zu beweisende Ungleichung (11.) in der Form

$$S = \sum_\nu \frac{\alpha_\nu (a - \alpha_\nu - 2)}{2+\alpha_\nu} \geqq 0$$

geschrieben werden. Es sei

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_{n-1},$$

also

$$a - \alpha_1 - 2 \leqq a - \alpha_2 - 2 \leqq \cdots \leqq a - \alpha_{n-1} - 2.$$

Der Fall, daß unter diesen Zahlen negative, aber keine positiven vorkommen, ist wegen (13.) nicht möglich. Ist keine der Zahlen $a - \alpha_\nu - 2$ negativ, so ist die Summe S gewiß nicht negativ und nur dann gleich Null, wenn alle Zahlen $a - \alpha_\nu - 2$ verschwinden, also

$$\alpha_\nu = \frac{2}{n-2}. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n-1)$$

Kommen aber unter den Zahlen $a - \alpha_\nu - 2$ sowohl positive als auch negative vor, so sei

$$a - \alpha_1 - 2 < 0, \quad a - \alpha_2 - 2 \leqq 0, \ \ldots \quad a - \alpha_m - 2 \leqq 0,$$
$$a - \alpha_{m+1} - 2 > 0, \ \ldots \quad a - \alpha_{n-1} - 2 > 0.$$

Dann wird

$$S = \sum_{\nu}\Big(\frac{\alpha_\nu}{2+\alpha_\nu} - \frac{\alpha_\nu}{2+\alpha_m}\Big)(a-\alpha_\nu-2) = \sum_{\nu}\frac{\alpha_\nu(\alpha_m-\alpha_\nu)(a-\alpha_\nu-2)}{(2+\alpha_\nu)(2+\alpha_m)}.$$

Da für $\nu \leqq m$

$$\alpha_m - \alpha_\nu \leqq 0, \qquad a-\alpha_\nu-2 \leqq 0$$

und für $\nu > m$

$$\alpha_m - \alpha_\nu > 0, \qquad a-\alpha_\nu-2 > 0$$

ist, so sind unter den Zahlen $(\alpha_m-\alpha_\nu)(a-\alpha_\nu-2)$ die ersten m positiv oder Null, die folgenden $n-1-m$ positiv. Daher ist in diesem Falle $S>0$.

Die hier durchgeführte Betrachtung lehrt nicht allein, daß stets

$$x_n - x_{n-1} \leqq x_{n-1} - x_{n-2}$$

ist, sondern auch, daß der Fall

$$x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2}$$

dann und nur dann eintritt, wenn entweder $x_n = x_{n-1} = x_{n-2}$ ist, oder wenn die von x_n verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ einander gleich, und zwar gleich

$$\tfrac{1}{2}\left[n x_{n-2} - (n-2)\,x_n\right]$$

sind. Die Funktion $f(x)$ ist dann von der Form

$$f(x) = c(x-p)\Big(x + \frac{n-2}{2}\,p - \frac{n}{2}\,q\Big)^{n-1} \qquad (p>q).$$

Setzt man

$$p' = \frac{p+q}{2}, \qquad q' = \frac{3q-p}{2},$$

so wird

$$(14.) \qquad f'(x) = nc(x-p')\Big(x + \frac{n-3}{2}\,p' - \frac{n-1}{2}\,q'\Big)^{n-2}.$$

Die Funktion $f'(x)$ ist also von derselben Form wie $f(x)$. Hat umgekehrt $f'(x)$ die Form (14.) und setzt man

$$p = \frac{3p'-q'}{2}, \qquad q = \frac{p'+q'}{2},$$

so wird

$$f(x) = c(x-p)\Big(x + \frac{n-2}{2}\,p - \frac{n}{2}\,q\Big)^{n-1} + C.$$

Da $f(x)=0$ lauter reelle Wurzeln haben soll, so muß, wenn $n>3$ ist, die Konstante C gleich Null sein.

Hieraus folgt: *Ist für einen Index* ν $(3 \leqq \nu \leqq n)$

$$x_\nu - x_{\nu-1} = x_{\nu-1} - x_{\nu-2},$$

aber nicht $x_\nu = x_{\nu-1} = x_{\nu-2}$, *so sind alle Differenzen*

$$x_2 - x_1,\ x_3 - x_2,\ \ldots\ x_n - x_{n-1}$$

einander gleich.

§ 5.

Der im vorigen Paragraphen bewiesene Satz II läßt einige nicht uninteressante Anwendungen zu.

Haben die Zahlen $x_1, x_2, \dots x_n$ die frühere Bedeutung und *ist für einen Index* $m \leqq n-2$

$$\frac{x_{m+1}}{m+1} \leqq \frac{x_m}{m}, \tag{15.}$$

so muß auch

$$\frac{x_{m+2}}{m+2} \leqq \frac{x_{m+1}}{m+1} \tag{16.}$$

sein. Denn schreibt man (15.) in der Form

$$x_{m+1} - x_m \leqq \frac{x_{m+1}}{m+1},$$

so ergibt sich

$$x_{m+2} - x_{m+1} \leqq x_{m+1} - x_m \leqq \frac{x_{m+1}}{m+1},$$

und dies liefert die Ungleichung (16.). *Betrachtet man also die Zahlen*

$$\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \dots \frac{x_n}{n},$$

so läßt sich stets eine Zahl m $(1 \leqq m \leqq n)$ *so angeben, daß*

$$\frac{x_1}{1} < \frac{x_2}{2} < \dots < \frac{x_m}{m}, \quad \frac{x_m}{m} \geqq \frac{x_{m+1}}{m+1} \geqq \dots \geqq \frac{x_n}{n}$$

wird. Sind insbesondere die beiden Wurzeln $2x_1 - x_2$ und x_2 der Gleichung $f^{(n-2)}(x) = 0$ nicht negativ, so wird $x_1 \geqq \frac{x_2}{2}$ und daher

$$\frac{x_1}{1} \geqq \frac{x_2}{2} \geqq \dots \geqq \frac{x_n}{n}.$$

Ersetzt man, wenn a eine reelle Konstante bedeutet, die Gleichung $f(x) = 0$ durch die Gleichung $f(x+a) = 0$, so treten an Stelle der Zahlen $x_1, x_2, \dots x_n$ die Zahlen

$$x_1' = x_1 - a, \; x_2' = x_2 - a, \; \dots \; x_n' = x_n - a.$$

Wählt man speziell für a die Zahl

$$a_m = (m+1)x_m - m x_{m+1},$$

so wird

$$\frac{x'_{m+1}}{m+1} = \frac{x'_m}{m},$$

also auch

$$\frac{x'_n}{n} \leqq \frac{x'_{n-1}}{n-1} \leqq \dots \leqq \frac{x'_{m+1}}{m+1}.$$

Es ist daher für jeden Wert von m

$$\frac{x_n - a_m}{n} \leqq \frac{x_{n-1} - a_m}{n-1} \leqq \cdots \leqq \frac{x_{m+1} - a_m}{m+1} = \frac{x_m - a_m}{m}.$$

Es sei nun

$$\beta_1, \beta_2, \ldots$$

eine unendliche Folge reeller Zahlen von der Art, daß jede der Gleichungen

$$G_n(x) = x^n + \binom{n}{1}\beta_1 x^{n-1} + \binom{n}{2}\beta_2 x^{n-2} + \cdots + \beta_n = 0 \quad (n=1, 2, \ldots)$$

lauter reelle Wurzeln besitzt. Diese Eigenschaft haben, wie in § 6 der folgenden Arbeit bewiesen wird, die Zahlen β_ν dann und nur dann, wenn die Potenzreihe

$$\Psi(x) = 1 + \frac{\beta_1}{1!}x + \frac{\beta_2}{2!}x^2 + \cdots$$

eine ganze rationale oder ganze transzendente Funktion darstellt, deren Produktzerlegung die Form

$$\Psi(x) = e^{-\gamma x^2 + \delta x} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + \delta_\nu x) e^{-\delta_\nu x}$$

aufweist. Hierbei sind unter $\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$ reelle Zahlen, unter γ eine nicht negative reelle Zahl zu verstehen. Ferner ist in jedem endlichen Gebiete gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n G_n\left(\frac{n}{x}\right) = \Psi(x).$$

Bezeichnet man nun mit x_n die größte Wurzel der Gleichung $G_n(x) = 0$, so wird, da

$$\frac{dG_n(x)}{dx} = nG_{n-1}(x)$$

ist,

$$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \cdots$$

und

$$x_2 - x_1 \geqq x_3 - x_2 \geqq \cdots. \tag{17.}$$

Daher existiert in jedem Falle der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} (x_n - x_{n-1}) = \lambda. \tag{18.}$$

Ich behaupte nun: *die (nicht negative) Zahl λ ist dann und nur dann von Null verschieden, wenn $\Psi(x)$ mindestens eine positive Nullstelle besitzt, und zwar ist*

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

die kleinste derartige Nullstelle von $\Psi(x)$.

Da nämlich

$$(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_1$$

ist, so folgt aus (18.) auch

$$\lambda = \lim_{n=\infty} \frac{x_n - x_1}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{x_n}{n}.$$

Ist daher λ von Null verschieden, also positiv, so sind die Zahlen x_n von einer gewissen Stelle ab positiv. Die Zahl $\frac{n}{x_n}$ ist dann die kleinste positive Nullstelle der Funktion

$$\left(\frac{x}{n}\right)^n G_n\left(\frac{n}{x}\right), \tag{19.}$$

und da diese Funktionen in jedem endlichen Gebiete gleichmäßig gegen $\Psi(x)$ konvergieren, so ist nach einem bekannten Satze*) der Grenzwert $\mu = \frac{1}{\lambda}$ der Zahlen $\frac{n}{x_n}$ eine Nullstelle, und zwar die kleinste positive Nullstelle von $\Psi(x)$.

Besitzt umgekehrt $\Psi(x)$ positive Nullstellen, unter denen die kleinste gleich μ ist, so muß für genügend große Werte von n auch die Funktion (19.) positive Nullstellen besitzen. Die kleinste unter ihnen ist dann $\frac{n}{x_n}$, und es muß der Grenzwert der Zahlen $\frac{n}{x_n}$ existieren und gleich μ sein. Dieser Grenzwert ist aber andererseits gleich $\frac{1}{\lambda}$.

Das hier gewonnene Resultat liefert einfache Abschätzungsformeln für die Zahl μ. Zunächst folgt aus (17.) für jeden Wert von n

$$\mu \geqq \frac{1}{x_n - x_{n-1}}.$$

Speziell erhält man die Formel

$$\mu \geqq \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{\sqrt{\beta_1^2 - \beta_2}},$$

die auch direkt leicht bewiesen werden kann. Ist ferner

$$a_m = (m+1)\, x_m - m x_{m+1},$$

so bilden nach dem früheren die Zahlen

$$\frac{n}{x_n - a_m} \qquad (n = m, m+1, \ldots)$$

eine Folge nicht abnehmender Zahlen, und da diese Zahlen wieder gegen μ konvergieren, so ist für $n \geqq m$

$$\mu \geqq \frac{n}{x_n - a_m}.$$

*) Vgl. *A. Hurwitz*, a. a. O.

Über zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen.

Von Herrn *G. Pólya* in Budapest und Herrn *J. Schur* in Bonn.

Laguerre hat zahlreiche spezielle unendliche Folgen reeller Zahlen

(A.) $$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$$

angegeben, die folgende merkwürdige Eigenschaft besitzen: ist

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m = 0$$

eine beliebige algebraische Gleichung mit lauter reellen Wurzeln*), so sind die Wurzeln der Gleichung

$$\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 x + \alpha_2 a_2 x^2 + \cdots + \alpha_m a_m x^m = 0$$

ebenfalls sämtlich reell. Eine Zahlenfolge (A.), die diese Eigenschaft besitzt, nennen wir eine *Faktorenfolge erster Art.*

Unter einer *Faktorenfolge zweiter Art* verstehen wir eine unendliche Folge reeller Zahlen

(B.) $$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots,$$

die so beschaffen ist, daß, wenn

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m = 0$$

eine beliebige Gleichung mit lauter reellen Wurzeln *von gleichem Vorzeichen* ist, die Gleichung

$$\beta_0 b_0 + \beta_1 b_1 x + \beta_2 b_2 x^2 + \cdots + \beta_m b_m x^m = 0$$

keine imaginäre Wurzel hat. Hierbei sprechen wir von einem System reeller Zahlen „von gleichem Vorzeichen", wenn die von Null verschiedenen Zahlen des Systems entweder sämtlich positiv oder sämtlich negativ sind.

*) Hierbei zählen wir die Konstanten zu den Polynomen mit lauter reellen Nullstellen.

Unter den von *Laguerre* angegebenen Beispielen heben wir insbesondere folgende hervor: die Folgen

$$(1.)\quad 1,\ \frac{1}{\omega},\ \frac{1}{\omega(\omega+1)},\ \frac{1}{\omega(\omega+1)(\omega+2)},\ \ldots \qquad (\omega>0),$$

$$(2.)\quad 1,\ q,\ q^4,\ q^9,\ \ldots \qquad (|q|\leqq 1)$$

sind Faktorenfolgen erster Art, ferner bilden, wenn λ und ϑ zwei reelle Zahlen sind, die Größen

$$(3.)\qquad \cos\lambda,\ \cos(\lambda+\vartheta),\ \cos(\lambda+2\vartheta),\ \ldots$$

eine Faktorenfolge zweiter Art*).

Eine Faktorenfolge erster Art ist selbstverständlich zugleich eine solche zweiter Art. Das Umgekehrte ist aber nicht immer der Fall; z. B. ist die Folge (3.), wenn ϑ nicht ein ganzzahliges Multiplum von π ist, keine Faktorenfolge erster Art.

Wir werden im folgenden für beide Arten von Faktorenfolgen einfache Kriterien angeben, die zugleich notwendig und hinreichend sind (§§ 3 und 4). Es wird sich insbesondere zeigen, daß die Untersuchung der beiden Arten von Faktorenfolgen und die Untersuchung gewisser zweier Klassen von ganzen transzendenten Funktionen identische Aufgaben sind. Auf diese Weise erhalten wir eine bemerkenswerte Methode, bekannte und auch neue Sätze über ganze transzendente Funktionen vom Geschlechte 0 und 1 mit lauter reellen Nullstellen abzuleiten (vgl. § 6).

Die folgenden Entwicklungen stützen sich in erster Linie auf den von *Schur* in der vorstehenden Arbeit bewiesenen Kompositionssatz. Diese Arbeit wird im folgenden kurz mit *A.* zitiert.

§ 1. Elementare Eigenschaften der Faktorenfolgen.

I. *In jeder Faktorenfolge erster Art*

$$(A.)\qquad \alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots$$

bilden die von Null verschiedenen Glieder eine einzige ununterbrochene Sequenz, die entweder lauter Zeichenwechsel oder lauter Zeichenfolgen aufweist.

Es ist also zu zeigen: sind α_λ und $\alpha_{\lambda+\mu}$ von Null verschieden, so verschwindet auch keine der dazwischenliegenden Zahlen; ferner ist

$$(4.)\qquad \operatorname{sign}\alpha_{\nu-1}=\operatorname{sign}\alpha_{\nu+1}. \qquad (\nu=\lambda+1,\ldots\lambda+\mu-1)$$

Es sei nämlich

*) *Laguerre*, Œuvres, Bd. I. S. 31—35 und S. 199—206.

$$a_\lambda x^\lambda + a_{\lambda+1} x^{\lambda+1} + \cdots + a_{\lambda+\mu} x^{\lambda+\mu} = 0$$

eine beliebige Gleichung mit lauter reellen Wurzeln, wobei a_λ und $a_{\lambda+\mu}$ von Null verschieden sind. Nach Voraussetzung hat dann auch die Gleichung

$$\alpha_\lambda a_\lambda x^\lambda + \alpha_{\lambda+1} a_{\lambda+1} x^{\lambda+1} + \cdots + \alpha_{\lambda+\mu} a_{\lambda+\mu} x^{\lambda+\mu} = 0$$

keine imaginäre Wurzel. Hieraus folgt, daß nicht zwei aufeinanderfolgende Glieder der Folge

$$\alpha_\lambda,\ \alpha_{\lambda+1},\ \cdots\ \alpha_{\lambda+\mu-1},\ \alpha_{\lambda+\mu}$$

verschwinden können (vgl. *A.*, Hilfssatz I).

Aber auch der Fall, daß nur ein Glied α_ν dieser Folge Null ist, ist auszuschließen. Denn wäre $\alpha_\nu = 0$, so müßten $\alpha_{\nu-1}$ und $\alpha_{\nu+1}$ beide von Null verschieden sein; ferner müßte, wie durch Betrachtung der Gleichungen

$$x^{\nu-1} - x^{\nu+1} = 0, \qquad x^{\nu-1} + 2x^\nu + x^{\nu+1} = 0$$

hervorgeht, jede der beiden Gleichungen

$$\alpha_{\nu-1} - \alpha_{\nu+1} x^2 = 0 \tag{5.}$$

und

$$\alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu+1} x^2 = \alpha_{\nu-1} + 2\alpha_\nu x + \alpha_{\nu+1} x^2 = 0$$

reelle Wurzeln haben. Dies ist aber nicht möglich.

Da ferner (5.), was auch α_ν sei, reelle Wurzeln haben muß, so ergibt sich zugleich die Richtigkeit der Gleichung (4.).

Noch einfacher beweist man:

II. *Sind in einer Faktorenfolge zweiter Art zwei nebeneinanderstehende Glieder gleich Null, so verschwinden entweder alle vorhergehenden oder alle folgenden Glieder. Ist ferner ein Glied der Folge Null und sind die beiden angrenzenden Glieder von Null verschieden, so müssen sie entgegengesetzte Vorzeichen haben.*

Ferner gilt die Regel:

III. *In jeder Faktorenfolge erster oder zweiter Art*

$$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_\nu, \cdots$$

ist

$$\gamma_\nu^2 - \gamma_{\nu-1}\gamma_{\nu+1} \geqq 0^*).$$

Beachtet man nämlich, daß die Gleichung

---

*) Hieraus geht z. B. hervor, daß die in der Einleitung erwähnte Folge (2.) für $|q| > 1$ keine Faktorenfolge ist.

$$x^{\nu-1} + 2x^{\nu} + x^{\nu+1} = 0$$

nur reelle Wurzeln von gleichem Vorzeichen hat, so ergibt sich, daß auch die Gleichung

$$\gamma_{\nu-1} x^{\nu-1} + 2\gamma_{\nu} x^{\nu} + \gamma_{\nu+1} x^{\nu+1} = 0$$

reelle Wurzeln besitzt, und hieraus folgt die Behauptung.

Sind

(A.) $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_\nu, \ldots$

(B.) $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu, \ldots,$

zwei Zahlenfolgen, so heiße

$$\alpha_0\beta_0,\ \alpha_1\beta_1,\ \alpha_2\beta_2, \ldots \alpha_\nu\beta_\nu, \ldots$$

die aus (A.) und (B.) *komponierte* Zahlenfolge. Es besteht dann die Regel:

IV. *Aus zwei Faktorenfolgen erster Art entsteht durch Komposition eine Faktorenfolge erster Art. Eine Faktorenfolge erster Art gibt, mit einer Faktorenfolge zweiter Art komponiert, eine Faktorenfolge der zweiten Art.*

Der erste Teil dieses Satzes ist unmittelbar evident. — Ist ferner (A.) eine Faktorenfolge erster Art, (B.) eine solche zweiter Art und

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m = 0$$

eine Gleichung mit lauter reellen Wurzeln von gleichem Vorzeichen, so besitzt die Gleichung

$$\alpha_0 b_0 + \alpha_1 b_1 x + \alpha_2 b_2 x^2 + \cdots + \alpha_m b_m x^m = 0$$

nur reelle Wurzeln, die nach Satz I *von gleichem Vorzeichen* sind. Daher besitzt die Gleichung

$$\beta_0 \alpha_0 b_0 + \beta_1 \alpha_1 b_1 x + \beta_2 \alpha_2 b_2 x^2 + \cdots + \beta_m \alpha_m b_m x^m = 0$$

keine imaginäre Wurzel.

V. *Ist*

$$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_\nu, \cdots$$

eine Faktorenfolge erster oder zweiter Art, so ist für jedes ν

$$\gamma_\nu, \gamma_{\nu+1}, \gamma_{\nu+2}, \cdots$$

wieder eine Faktorenfolge derselben Art.

Ist nämlich

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_m x^m = 0$$

eine Gleichung mit nur reellen Wurzeln, bzw. mit lauter reellen Wurzeln von gleichem Vorzeichen, so besitzt die Gleichung

$$c_0 x^{\nu} + c_1 x^{\nu+1} + \cdots + c_m x^{\nu+m} = 0$$

dieselbe Eigenschaft. Daher hat

$$\gamma_\nu c_0 x^\nu + \gamma_{\nu+1} c_1 x^{\nu+1} + \cdots + \gamma_{\nu+m} c_m x^{\nu+m} = 0$$

oder, was dasselbe ist,

$$\gamma_\nu c_0 + \gamma_{\nu+1} c_1 x + \cdots + \gamma_{\nu+m} c_m x^m = 0$$

in beiden Fällen keine imaginären Wurzeln. Hieraus geht die Richtigkeit der Behauptung hervor.

VI. *Sind*

$$\gamma_{n0}, \gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \cdots \gamma_{n\nu}, \cdots \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

unendlich viele Faktorenfolgen erster (bzw. zweiter) Art und existiert für jedes ν

$$\lim_{n=\infty} \gamma_{n\nu} = \gamma_\nu,$$

so bilden die Zahlen

$$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_\nu, \cdots$$

ebenfalls eine Faktorenfolge erster (bzw. zweiter) Art.

Dies ergibt sich sehr leicht aus *A.*, Hilfssatz III.

§ 2. Über zwei Klassen von ganzen Funktionen mit reellen Koeffizienten.

Unter einer *ganzen Funktion vom Typus* I verstehen wir eine ganze rationale oder eine ganze transzendente Funktion

$$\Phi(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!} x + \frac{\alpha_2}{2!} x^2 + \cdots$$

mit lauter reellen Wurzeln von gleichem Vorzeichen, für die entweder $\Phi(x)$ oder $\Phi(-x)$ eine Produktzerlegung der Form

$$\text{(I.)} \qquad \Phi(x) = \frac{\alpha_r}{r!} x^r e^{\gamma x} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + \gamma_\nu x)$$

besitzt. Hierbei soll

$$\alpha_r \gtrless 0, \ \gamma \geqq 0, \ \gamma_\nu \geqq 0$$

sein.

Ebenso soll eine ganze (rationale oder transzendente) Funktion

$$\Psi(x) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1!} x + \frac{\beta_2}{2!} x^2 + \cdots$$

als eine *Funktion vom Typus* II bezeichnet werden, wenn die Nullstellen der Funktion sämtlich reell sind und ihre Produktzerlegung von der Form

$$\text{(II.)} \qquad \Psi(x) = \frac{\beta_r}{r!} x^r e^{-\gamma x^2 + \delta x} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + \delta_\nu x) e^{-\delta_\nu x} \qquad (\beta_r \lesseqgtr 0)$$

ist. Unter $\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$ sind hierbei reelle Zahlen*), unter γ eine nicht negative reelle Zahl zu verstehen.

---

*) Sie brauchen nicht von demselben Vorzeichen zu sein.

Offenbar ist eine Funktion vom Typus I zugleich auch vom Typus II.

Diese beiden Funktionenklassen lassen sich durch die folgenden bemerkenswerten Sätze I und II charakterisieren:

I. *Eine Potenzreihe*

$$\Phi(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!}x + \frac{\alpha_2}{2!}x^2 + \cdots$$

mit reellen Koeffizienten stellt dann und nur dann eine ganze Funktion vom Typus I dar, wenn sich eine Folge von Polynomen

$$\Phi_n(x) = \alpha_{n0} + \frac{\alpha_{n1}}{1!}x + \frac{\alpha_{n2}}{2!}x^2 + \cdots \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

mit lauter reellen Nullstellen von gleichem Vorzeichen angeben läßt, die in einem Kreise $|x| \leqq \varrho$ *gleichmäßig gegen* $\Phi(x)$ *konvergiert.*

Bei dem Beweise dieses Satzes kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daß die Nullstellen der Polynome $\Phi_n(x)$ (bzw. der Funktion $\Phi(x)$) sämtlich $\leqq 0$ und die Koeffizienten $\alpha_{n\nu}$ (bzw. α_ν) sämtlich $\geqq 0$ sind.

Wir nehmen nun an, die Polynome $\Phi_n(x)$ konvergieren für $|x| \leqq \varrho$ gleichmäßig gegen $\Phi(x)$. Dann ist bekanntlich

$$\lim_{n=\infty} \alpha_{n\nu} = \alpha_\nu . \qquad (\nu=0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Wählt man eine beliebige positive ganze Zahl m und beachtet man, daß die Wurzeln der Gleichung

$$(1+x)^m = \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} x^\mu = 0$$

reell und negativ sind, so erkennt man auf Grund des in *A.* bewiesenen Kompositionssatzes, daß die Gleichung

$$(6.) \qquad \sum_{\mu=0}^{m} \mu! \frac{\alpha_{n\mu}}{\mu!} \binom{m}{\mu} x^\mu = 0$$

nur reelle Wurzeln hat, und zwar sind wegen der über die Polynome $\Phi_n(x)$ gemachten Voraussetzung die nicht verschwindenden unter ihnen negativ. Läßt man in (6.) n über alle Grenzen wachsen, so erhält man die Gleichung

---

*) Wir bemerken hier ausdrücklich, daß die Funktion, die identisch gleich Null ist, sowohl zum Typus I als auch zum Typus II gerechnet wird, obgleich sie in den Formeln (I.) und (II.) nicht enthalten ist; vergl. die Fußnote auf S. 89.

$$F_m(x) = \alpha_0 + \binom{m}{1}\alpha_1 x + \binom{m}{2}\alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_m x^m = 0,$$

deren Wurzeln ebenfalls reell und $\leqq 0$ sind.

Sind nun alle Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ gleich Null, so ist $\Phi(x)$ gewiß eine Funktion vom Typus I. Im andern Falle sei α_r der erste nicht verschwindende Koeffizient der Reihe $\Phi(x)$. Ist $m > r$, so sei

$$F_m(x) = \binom{m}{r}\alpha_r x^r \prod_{\mu=1}^{m-r}(1 + \gamma_{m\mu} x),$$

wo die $\gamma_{m\mu}$ reelle nicht negative Zahlen bedeuten. Dann wird

$$\binom{m}{r+1}\alpha_{r+1} = \binom{m}{r}\alpha_r \sum_{\mu=1}^{m-r}\gamma_{m\mu} \tag{7.}$$

und

$$\alpha_m = \binom{m}{r}\alpha_r \prod_{\mu=1}^{m-r}\gamma_{m\mu}.$$

Nach dem Satz über das arithmetische und das geometrische Mittel ergibt sich

$$\frac{\alpha_m}{\binom{m}{r}\alpha_r} \leqq \left\{\frac{\binom{m}{r+1}\alpha_{r+1}}{(m-r)\binom{m}{r}\alpha_r}\right\}^{m-r}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\alpha_m \leqq \binom{m}{r}\alpha_r\left(\frac{\alpha_{r+1}}{(r+1)\alpha_r}\right)^{m-r}. \tag{8.}$$

Daher ist

$$\frac{\alpha_m}{m!} \leqq \frac{1}{(m-r)!}\,\frac{\alpha_r}{r!}\left(\frac{\alpha_{r+1}}{(r+1)\alpha_r}\right)^{m-r}.$$

Hieraus folgt ohne weiteres, daß die Reihe $\Phi(x)$ beständig konvergent ist. Auf Grund der *Hadamard*schen Theorie ergibt sich zugleich, daß $\Phi(x)$ höchstens vom Geschlechte 1 ist.

Nun konvergieren, wie man leicht erkennt, die Polynome

$$F_m\left(\frac{x}{m}\right) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!}x + \frac{\alpha_2}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)x + \frac{\alpha_3}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)x^2 + \cdots$$
$$= \frac{\alpha_r}{r!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{m}\right)x^r \prod_{\mu=1}^{m-r}\left(1+\frac{\gamma_{m\mu}}{m}x\right)$$

in jedem endlichen Gebiet gleichmäßig gegen $\Phi(x)$. Hieraus folgt zunächst, daß die Nullstellen

$$-\frac{1}{\gamma_1}, -\frac{1}{\gamma_2}, -\frac{1}{\gamma_3}, \ldots$$

der Funktion $\Phi(x)$ (falls solche überhaupt vorhanden sind) sämtlich reell sind und das den Größen $-\frac{m}{\gamma_{m\mu}}$ gemeinsame negative Vorzeichen besitzen.

Die Gleichung (7.) lautet anders geschrieben

$$\sum_{\mu=1}^{m-r} \frac{\gamma_{m\mu}}{m} = \frac{m-r}{m} \frac{\alpha_{r+1}}{(r+1)\alpha_r}.$$

Hieraus ergibt sich leicht, daß $\sum_1^\infty \gamma_\mu$ konvergiert und daß

$$\sum_1^\infty \gamma_\mu \leqq \frac{\alpha_{r+1}}{(r+1)\alpha_r} \tag{9.}$$

ist. Daher kann gewiß geschlossen werden, daß

$$\Phi(x) = \frac{\alpha_r}{r!} x^r + \frac{\alpha_{r+1}}{(r+1)!} x^{r+1} + \cdots = \frac{\alpha_r}{r!} x^r e^{\gamma x} \prod_{\nu=1}^\infty (1+\gamma_\nu x)$$

ist, und da hieraus

$$\frac{\alpha_{r+1}}{(r+1)!} = \frac{\alpha_r}{r!}\left(\gamma + \sum_{\nu=1}^\infty \gamma_\nu\right)$$

folgt, so ist wegen (9.) die Zahl γ nicht negativ.

Daß umgekehrt zu jeder Funktion $\Phi(x)$ vom Typus I (mit nichtpositiven Nullstellen) eine Polynomfolge der verlangten Art angegeben werden kann, ist sehr leicht zu sehen. Ist nämlich

$$\Phi(x) = \frac{\alpha_r}{r!} x^r e^{\gamma x} \prod_{\nu=1}^\infty (1+\gamma_\nu x) \quad (\gamma, \gamma_\nu \geqq 0)$$

eine solche Funktion, so setze man etwa

$$\Phi_n(x) = \frac{\alpha_r}{r!} x^r \left(1+\frac{\gamma x}{n}\right)^n \prod_{\nu=1}^n (1+\gamma_\nu x).$$

Diese Ausdrücke liefern eine Folge von Polynomen mit lauter reellen, nicht positiven Nullstellen, die in jedem endlichen Bereich gleichmäßig gegen $\Phi(x)$ konvergiert.

II. *Eine Potenzreihe*

$$\Psi(x) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1!} x + \frac{\beta_2}{2!} x^2 + \cdots$$

mit reellen Koeffizienten stellt dann und nur dann eine ganze Funktion vom zweiten Typus dar, wenn sich eine Folge von Polynomen

$$\Psi_n(x) = \beta_{n0} + \frac{\beta_{n1}}{1!} x + \frac{\beta_{n2}}{2!} x^2 + \cdots$$

mit lauter reellen Nullstellen angeben läßt, die in einem Kreise $|x| \leqq \varrho$ *gleichmäßig gegen* $\Psi(x)$ *konvergiert.*

Konvergieren nämlich die Polynome $\Psi_n(x)$ für $|x| \leqq \varrho$ gleichmäßig

gegen $\Psi(x)$, so schließt man ganz ebenso wie beim Satze I unter Benutzung des Kompositionssatzes, daß die Gleichungen

$$G_m(x) = \beta_0 + \binom{m}{1}\beta_1 x + \binom{m}{2}\beta_2 x^2 + \cdots + \beta_m x^m = 0$$

für jedes m lauter reelle Wurzeln besitzen, die in diesem Falle aber nicht notwendigerweise von gleichem Vorzeichen zu sein brauchen. Ist β_r der erste nicht verschwindende Koeffizient der Reihe $\Psi(x)$, so sei $m > r+1$ und

$$G_m(x) = \binom{m}{r}\beta_r x^r \prod_{\mu=1}^{m-r}(1 + \delta_{m\mu} x).$$

Dann ist

$$\binom{m}{r+1}^2 \beta_{r+1}^2 - 2\binom{m}{r}\binom{m}{r+2}\beta_r\beta_{r+2} = \binom{m}{r}^2 \beta_r^2 \sum_{\mu=1}^{m-r} \delta_{m\mu}^2$$

und

$$\beta_m = \binom{m}{r}\beta_r \prod_{\mu=1}^{m-r} \delta_{m\mu}.$$

Hieraus folgt durch Anwendung des Satzes von dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel auf die Zahlen $\delta_{m\mu}^2$, daß

$$\frac{\beta_m^2}{\binom{m}{r}^2 \beta_r^2} \leqq \left\{ \frac{\binom{m}{r+1}^2 \beta_{r+1}^2 - 2\binom{m}{r}\binom{m}{r+2}\beta_r\beta_{r+2}}{(m-r)\binom{m}{r}^2 \beta_r^2} \right\}^{m-r}$$

oder, einfacher geschrieben,

$$\beta_m^2 \leqq \binom{m}{r}^2 \beta_r^2 \left\{ \frac{(m-r)\beta_{r+1}^2}{(r+1)^2\beta_r^2} - \frac{2(m-r-1)\beta_{r+2}}{(r+1)(r+2)\beta_r} \right\}^{m-r}$$

wird. Daher ist

$$\beta_m^2 \leqq m^m c^m,$$

wo c eine passend gewählte Konstante ist (die nur von r, β_r, β_{r+1}, β_{r+2} abhängt). Es ist also

$$\text{(10.)} \qquad \frac{|\beta_m|}{m!} \leqq \frac{m^{\frac{m}{2}}}{m!} c^{\frac{m}{2}},$$

und dies setzt in Evidenz, daß die Reihe $\Psi(x)$ beständig konvergiert; auf Grund der *Hadamard*schen Theorie ergibt sich zugleich, daß $\Psi(x)$ höchstens vom Geschlechte 2 ist.

Beachtet man nun, daß $\Psi_n(x)\,\Psi_n(-x)$, als ganze rationale Funktion von x^2 betrachtet, lauter reelle nicht negative Wurzeln besitzt*) und

*) Ihre Wurzeln sind nämlich die Quadrate der Wurzeln von $\Psi_n(x)$.

daß die Polynome $\Psi_n(x)\,\Psi_n(-x)$ im Kreise $|x^2| \leqq \varrho^2$ gleichmäßig gegen $\Psi(x)\,\Psi(-x)$ konvergieren, so ergibt sich nach Satz I, daß $\Psi(x)\,\Psi(-x)$, als Funktion von x^2 betrachtet, eine ganze Funktion vom ersten Typus mit lauter reellen nicht negativen Nullstellen ist.

Hieraus folgt *erstens*, daß die Nullstellen von $\Psi(x)$ reell sind, *zweitens*, daß die Summe der Quadrate der reziproken Nullstellen konvergent ist, und endlich auch, daß in der folglich zulässigen Produktentwicklung

$$\text{(II.)} \qquad \Psi(x) = \frac{\beta_r}{r!}\, x^r e^{-\gamma x^2 + \delta x} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + \delta_\nu x)\, e^{-\delta_\nu x}$$

die Zahl γ nicht negativ ist. Es ist nämlich

$$(-1)^r \Psi(x)\,\Psi(-x) = \frac{\beta_r^2}{r!^2}\, x^{2r} e^{-2\gamma x^2} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - \delta_\nu^2 x^2).$$

Ist umgekehrt $\Psi(x)$ eine ganze Funktion, die eine solche Darstellung (von der Form (II.)) zuläßt, so setze man

$$\delta - \delta_1 - \delta_2 - \cdots - \delta_n = d_n$$

und bestimme die positive ganze Zahl m_n etwa derart, daß für $|x| \leqq n$

$$\left| 1 - \frac{\left(1 + \frac{d_n x}{m_n}\right)^{m_n}}{e^{d_n x}} \right| < \frac{1}{n}$$

wird. Bedeutet dann $\Psi_n(x)$ das Polynom

$$\Psi_n(x) = \frac{\beta_r}{r!}\, x^r \left(1 - \frac{\gamma x^2}{n}\right)^n \left(1 + \frac{d_n x}{m_n}\right)^{m_n} \prod_{\nu=1}^{n} (1 + \delta_\nu x),$$

dessen Nullstellen offenbar reell sind, so ist, wie man leicht erkennt, in jedem endlichen Bereich gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} \Psi_n(x) = \Psi(x).$$

Hiermit ist der Satz II vollständig bewiesen.

Daß eine Folge von Polynomen mit lauter reellen Nullstellen von gleichem Vorzeichen, die in *jedem* endlichen Bereich gleichmäßig konvergent ist, stets eine ganze Funktion vom ersten Typus darstellt, hat bereits *Laguerre**) bewiesen. Er hat auch den analogen Satz für Polynome mit nur reellen Nullstellen ohne Beweis ausgesprochen. Daß in beiden Fällen bereits die gleichmäßige Konvergenz in einem noch so kleinen

---

*) Œuvres, Bd. I, S. 174—177.

Kreise $|x| \leqq \varrho$ hinreichend ist, hat zuerst *Pólya**) gezeigt. Der hier angegebene Beweis, der sich in erster Linie auf den Kompositionssatz stützt, scheint uns wegen seines algebraischen Charakters von Interesse zu sein.

Um eine unmittelbare Anwendung dieser Resultate zu geben, erwähnen wir folgendes. Es sei

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix}$$

eine unendliche symmetrische Matrix mit reellen Elementen. Man setze

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} 1 - a_{11}x & -a_{12}x & \cdots & -a_{1n}x \\ -a_{21}x & 1 - a_{22}x & \cdots & -a_{2n}x \\ \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ -a_{n1}x & -a_{n2}x & \cdots & 1 - a_{nn}x \end{vmatrix}.$$

Existiert dann in einem noch so kleinen Kreise $|x| \leqq \varrho$ gleichmäßig $\lim\limits_{n=\infty} \Delta_n(x) = \Delta(x)$, so ist

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 - a_{11}x & -a_{12}x & \cdots \\ -a_{21}x & 1 - a_{22}x & \cdots \\ \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \end{vmatrix}$$

eine ganze Funktion vom Typus II.

Der Vollständigkeit wegen fügen wir noch folgende Bemerkung hinzu:

Sind

$$\Omega_n(x) = \gamma_{n0} + \frac{\gamma_{n1}}{1!}x + \frac{\gamma_{n2}}{2!}x^2 + \cdots$$

Polynome, deren Nullstellen oberhalb oder auf der reellen Achse gelegen sind, und ist in einem noch so kleinen Kreise $|x| \leqq \varrho$ *gleichmäßig*

$$\lim_{n=\infty} \Omega_n(x) = \Omega(x) = \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{1!}x + \frac{\gamma_2}{2!}x^2 + \cdots,$$

so ist $\Omega(x)$ *eine ganze Funktion höchstens vom Geschlechte* 2.

---

*) Über Annäherung durch Polynome mit lauter reellen Wurzeln, Rend. del Circ. mat. di Palermo, t. 36 (1913), S. 279. — Weitergehende Sätze findet man in der Arbeit: *E. Lindwart* und *G. Pólya*, Über einen Zusammenhang zwischen der Konvergenz von Polynomfolgen und der Verteilung ihrer Wurzeln, Rend. del Circ. mat. di Palermo, t. 37 (1914).

Denn ist

$$\gamma_{n\nu} = \gamma'_{n\nu} + i\gamma''_{n\nu}, \qquad \gamma_\nu = \gamma'_\nu + i\gamma''_\nu$$

($\gamma'_{n\nu}, \gamma''_{n\nu}, \gamma'_\nu, \gamma''_\nu$ reell) und setzt man

$$\Omega_n^{(1)}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\gamma'_{n\nu}}{\nu!} x^\nu, \qquad \Omega_n^{(2)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\gamma''_{n\nu}}{\nu!} x^\nu,$$

$$\Omega^{(1)}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\gamma'_\nu}{\nu!} x^\nu, \qquad \Omega^{(2)}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\gamma''_\nu}{\nu!} x^\nu,$$

so wird für $|x| \leqq \varrho$ gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} \Omega_n^{(1)}(x) = \Omega^{(1)}(x), \qquad \lim_{n=\infty} \Omega_n^{(2)}(x) = \Omega^{(2)}(x).$$

Nun sind aber nach einem bekannten, von *Biehler* herrührenden Satze*) die Nullstellen der Polynome $\Omega_n^{(1)}(x)$ und $\Omega_n^{(2)}(x)$, infolge der über $\Omega_n(x)$ gemachten Voraussetzung, sämtlich reell. Nach der beim Beweis des Satzes II gefundenen Ungleichung (10.) gibt es zwei positive Konstanten c' und c'', so daß

$$\frac{|\gamma'_m|}{m!} \leqq \frac{m^{\frac{m}{2}}}{m!} c'^m, \qquad \frac{|\gamma''_m|}{m!} \leqq \frac{m^{\frac{m}{2}}}{m!} c''^m.$$

Hieraus folgt aber die oben ausgesprochene Behauptung über die Funktion $\Omega(x)$**).

§ 3. Algebraische Kriterien für Faktorenfolgen.

I. *Eine Folge reeller Zahlen*

(A.) $$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$$

ist dann und nur dann eine Faktorenfolge erster Art, wenn alle Gleichungen

(11.) $$\alpha_0 + \binom{n}{1}\alpha_1 x + \binom{n}{2}\alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n = 0 \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

lauter reelle Wurzeln von gleichem Vorzeichen besitzen.

Ist nämlich (A.) eine Faktorenfolge erster Art, so ergibt sich aus der Tatsache, daß die Wurzeln der Gleichung

$$1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + x^n = 0$$

alle reell sind, unmittelbar auf Grund der Definition der Faktorenfolgen erster Art, daß auch die Gleichung (11.) lauter reelle Wurzeln besitzt.

---

*) Vgl. *Netto*, Vorlesungen über Algebra, Bd. I, S. 236—237.

**) Vgl. *Lindwart* und *Pólya*, a. a. O.

Aus dem Satz I des § 1 ergibt sich ferner, daß diese Wurzeln alle von demselben Vorzeichen sind.

Weiß man umgekehrt, daß jede der Gleichungen (11.) lauter reelle Wurzeln von demselben Vorzeichen besitzt, so sei

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m = 0$$

eine beliebige Gleichung ohne imaginäre Wurzeln. Aus dem Kompositionssatz ergibt sich, daß für jedes n auch die Gleichung

$$a_0 \alpha_0 + 1!\, a_1 \alpha_1 \binom{n}{1} x + \cdots + m!\, a_m \alpha_m \binom{n}{m} x^m = 0$$

keine imaginäre Wurzel hat. Ersetzt man x durch $\frac{x}{n}$, so erhält man die Gleichung

$$a_0 \alpha_0 + a_1 \alpha_1 x + a_2 \alpha_2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) x + \cdots + a_m \alpha_m \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right) x^m = 0,$$

deren Wurzeln offenbar ebenfalls sämtlich reell sind. Da dies für jedes n gilt, so ergibt sich durch Grenzübergang, daß auch die Gleichung

$$a_0 \alpha_0 + a_1 \alpha_1 x + a_2 \alpha_2 x^2 + \cdots + a_m \alpha_m x^m = 0$$

nur reelle Wurzeln hat. — Hiermit ist der Satz I vollständig bewiesen.

II. *Eine Folge reeller Zahlen*

(B.) $$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$$

ist dann und nur dann eine Faktorenfolge zweiter Art, wenn alle Gleichungen

(12.) $$\beta_0 + \binom{n}{1} \beta_1 x + \binom{n}{2} \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_n x^n = 0 \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

lauter reelle Wurzeln haben.

Daß diese Bedingung notwendig erfüllt sein muß, ist hier unmittelbar klar. Sie ist aber auch hinreichend. Denn es sei

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m = 0$$

eine Gleichung mit lauter reellen Wurzeln *von gleichem Vorzeichen.* Durch Komposition dieser Gleichung mit der Gleichung (12.), die nach Voraussetzung lauter reelle Wurzeln haben soll, ergibt sich wieder nach dem eben benutzten Kompositionssatz, daß auch die Gleichung

$$\beta_0 b_0 + 1!\binom{n}{1}\beta_1 b_1 x + 2!\binom{n}{2}\beta_2 b_2 x^2 + \cdots + m!\binom{n}{m}\beta_m b_m x^m = 0 \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

lauter reelle Wurzeln hat, und nun schließt man genau ebenso wie vorher, daß auch die Gleichung

$$\beta_0 b_0 + \beta_1 b_1 x + \beta_2 b_2 x^2 + \cdots + \beta_m b_m x^m = 0$$

keine imaginäre Wurzel besitzt.

III. *Eine Faktorenfolge zweiter Art*

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$$

ist dann und nur dann zugleich auch eine Faktorenfolge erster Art, wenn die von Null verschiedenen Glieder der Folge eine ununterbrochene Sequenz mit lauter Zeichenfolgen oder lauter Zeichenwechseln bilden.

Denn dann und nur dann, wenn diese Bedingung erfüllt ist, sind die sämtlich reellen Wurzeln der Gleichungen (12.) von gleichem Vorzeichen.

Die Überlegung, die zu den Sätzen I und II führt, gestattet noch eine interessante Eigenschaft der Faktorenfolgen zweiter Art abzuleiten.

IV. *Es mögen die Zahlen*

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$$

eine Faktorenfolge zweiter Art bilden. Sind dann die Zahlen

$$\beta_l, \beta_{l+1}, \beta_{l+2}, \ldots \beta_{l+m}$$

von Null verschieden und entweder sämtlich von demselben Vorzeichen oder abwechselnd positiv und negativ, so besitzt stets, wenn

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m = 0$$

eine beliebige Gleichung mit lauter reellen Wurzeln ist, auch die Gleichung

$$\beta_l a_0 + \beta_{l+1} a_1 x + \beta_{l+2} a_2 x^2 + \cdots + \beta_{l+m} a_m x^m = 0$$

keine imaginäre Wurzel.

Auf Grund des Satzes V des § 1 bilden nämlich die unendlich vielen Zahlen

$$\beta_l, \beta_{l+1}, \beta_{l+2}, \ldots$$

eine Faktorenfolge zweiter Art. Daher besitzt jede der Gleichungen

$$\beta_l + \binom{n}{1} \beta_{l+1} x + \binom{n}{2} \beta_{l+2} x^2 + \cdots + \beta_{l+m} x^m = 0$$

lauter reelle Wurzeln. Folglich sind (vergl. *A.* Satz I′.) die Wurzeln der Gleichungen

$$\beta_l a_0 + 1! \binom{n}{1} \beta_{l+1} a_1 x + \cdots + m! \binom{n}{m} \beta_{l+m} a_m x^m = 0$$

sämtlich reell. Ersetzt man x durch $\frac{x}{n}$ und läßt n über alle Grenzen wachsen, so erhält man den Satz IV. —

Wir fügen noch eine Bemerkung hinzu, die dazu dienen soll, den Begriff der unendlichen Faktorenfolgen und zugleich den fortwährend benutzten Kompositionssatz von einer neuen Seite zu beleuchten.

Wir stellen uns die Aufgabe, alle unendlichen Zahlenfolgen

(13.) $$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_\nu \cdots$$

zu bestimmen, die folgende Eigenschaft haben: Besitzen die beiden Gleichungen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m = 0,$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n = 0$$

nur reelle Wurzeln und sind die der zweiten Gleichung von gleichem Vorzeichen, so soll, wenn k die kleinere der beiden Zahlen m und n bedeutet, die Gleichung

(14.) $$\gamma_0 a_0 b_0 + \gamma_1 a_1 b_1 x + \gamma_2 a_2 b_2 x^2 + \cdots + \gamma_k a_k b_k x^k = 0$$

keine imaginäre Wurzel haben.

Die Lösung lautet: *die Folge* (13.) *hat dann und nur dann die verlangte Eigenschaft, wenn die Zahlen*

(15.) $$\gamma_0, \frac{\gamma_1}{1!}, \frac{\gamma_2}{2!}, \cdots \frac{\gamma_\nu}{\nu!}, \cdots$$

eine Faktorenfolge erster Art bilden.

Ist nämlich (15.) eine Faktorenfolge erster Art, so besitzt nach dem Kompositionssatz die Gleichung

$$a_0 b_0 + 1!\, a_1 b_1 x + \cdots + k!\, a_k b_k x^k = 0$$

und folglich auch die Gleichung

$$\gamma_0 a_0 b_0 + \frac{\gamma_1}{1!} 1!\, a_1 b_1 x + \cdots + \frac{\gamma_k}{k!} k!\, a_k b_k x^k = 0$$

lauter reelle Wurzeln.

Weiß man umgekehrt, daß die Folge (13.) die verlangte Eigenschaft hat, so wähle man $f(x)$ beliebig und $g(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Dann geht die Gleichung (14.), deren Wurzeln reell sein sollen, für $n \geqq m$ über in

$$\gamma_0 a_0 + \gamma_1 a_1 \binom{n}{1} \frac{x}{n} + \cdots + \gamma_m a_m \binom{n}{m} \frac{x^m}{n^m} = 0.$$

Läßt man n über alle Grenzen wachsen, so erhält man die Gleichung

$$\gamma_0 a_0 + \frac{\gamma_1}{1!} a_1 x + \frac{\gamma_2}{2!} a_2 x^2 + \cdots + \frac{\gamma_m}{m!} a_m x^m = 0$$

Da diese Gleichung demnach zugleich mit $f(x) = 0$ lauter reelle Wurzeln hat, wie auch $f(x) = 0$ sonst gewählt sei, so bilden die Zahlen (15.) eine Faktorenfolge erster Art.

Dieses Resultat kann auch so aufgefaßt werden: Die sämtlichen „Faktorenfolgen“ für die spezielle Klasse von Gleichungen

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 x + a_2 b_2 x^2 + \cdots + a_k b_k x^k$$

mit nur reellen Wurzeln, auf die sich der *Malo*sche Satz bezieht, werden erhalten, indem man sämtliche Faktorenfolgen erster Art mit der Folge

$$0!, 1!, 2!, 3!, \ldots \nu!, \ldots$$

komponiert.

§ 4. Transzendente Kriterien für Faktorenfolgen.

I. *Eine Folge reeller Zahlen*

(A.) $$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$$

ist dann und nur dann eine Faktorenfolge erster Art, wenn die Potenzreihe

$$\Phi(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!} x + \frac{\alpha_2}{2!} x^2 + \cdots$$

beständig konvergiert und eine ganze Funktion vom ersten Typus darstellt).*

Bilden nämlich die Zahlen (A.) eine Faktorenfolge erster Art, so haben die Gleichungen (11.) lauter reelle Wurzeln von gleichem Vorzeichen. Hieraus folgt aber, wie beim Beweise des Satzes I des § 2 (vergl. die Formeln (7.), (8.), (9.)) gezeigt worden ist, daß die Reihe $\Phi(x)$ beständig konvergiert und eine ganze Funktion vom Typus I ist.

Ist umgekehrt $\Phi(x)$ eine ganze Funktion vom ersten Typus, so läßt sich nach dem eben erwähnten Satze eine Folge von Polynomen

$$\Phi_n(x) = \alpha_{n0} + \frac{\alpha_{n1}}{1!} x + \frac{\alpha_{n2}}{2!} x^2 + \cdots \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

angeben, deren Wurzeln reell und *von gleichem Vorzeichen* sind, so daß in jedem endlichen Bereich gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} \Phi_n(x) = \Phi(x)$$

und folglich

(16.) $$\lim_{n=\infty} \alpha_{n\nu} = \alpha_\nu \qquad (\nu=0, 1, 2, 3, \ldots)$$

wird.

---

*) Die Reihe $\Phi(x)$ haben bei speziellen Faktorenfolgen bereits *Laguerre* (Œuvres, t. I, p. 177 und p. 202—204) und *Hurwitz*, Über die Wurzeln einiger transzendenter Gleichungen (Hamb. Mitt. II, 1890, S. 25) behandelt und festgestellt, daß in diesen Fällen die Reihe eine ganze Funktion vom Typus I darstellt. Vergl. auch *Jensen*, Recherches sur la théorie des équations, Acta Math. Bd. 36, 1912—13, S. 181—195.

Bedeutet nun

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m = 0$$

eine beliebige Gleichung mit nur reellen Wurzeln, so ergibt sich aus dem Kompositionssatz, daß auch die Gleichungen

$$\alpha_{n0} a_0 + \alpha_{n1} a_1 x + \alpha_{n2} a_2 x^2 + \cdots + \alpha_{nm} a_m x^m = 0 \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

keine imaginäre Wurzel haben. Also sind wegen (16.) die Wurzeln der Gleichung

$$\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 x + \alpha_2 a_2 x^2 + \cdots + \alpha_m a_m x^m = 0$$

sämtlich reell.

II. *Eine Folge reeller Zahlen*

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$$

ist dann und nur dann eine Faktorenfolge zweiter Art, wenn die Reihe

$$\Psi(x) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1!} x + \frac{\beta_2}{2!} x^2 + \cdots$$

beständig konvergent ist und eine ganze Funktion vom zweiten Typus darstellt.

Der Beweis läßt sich ganz ebenso führen, wie bei dem eben behandelten Satze I.

§ 5. Beispiele.

Auf Grund der Sätze I und II des vorhergehenden § 4 werden wir einige spezielle bemerkenswerte Faktorenfolgen ableiten.

1. Da für jedes positive ganze r

$$x^r e^x = r! \frac{x^r}{r!} + \frac{(r+1)!}{1!} \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} + \frac{(r+2)!}{2!} \frac{x^{r+2}}{(r+2)!} + \cdots$$

eine ganze Funktion vom ersten Typus ist, so bilden die Zahlen

$$0,\ 0,\ \ldots\ 0,\ r!,\ \frac{(r+1)!}{1!},\ \frac{(r+2)!}{2!},\ \ldots$$

eine Faktorenfolge erster Art. Dies besagt nur, daß die r-te Derivierte eines Polynoms mit nur reellen Nullstellen dieselbe Eigenschaft besitzt.

2. Die Funktion

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2!} + 1 \cdot 3 \frac{x^4}{4!} - 1 \cdot 3 \cdot 5 \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

ist vom Typus II, daher bilden die Zahlen

$$1,\quad 0,\quad -1,\quad 0,\quad 1 \cdot 3,\quad 0,\quad -1 \cdot 3 \cdot 5,\quad 0,\ \ldots$$

eine Faktorenfolge zweiter Art.

3. Sind λ und ϑ zwei reelle Zahlen, so ist, wie eine einfache Rechnung zeigt,

$$F(x) = e^{x\cos\vartheta}\cos(\lambda + x\sin\vartheta) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\cos(\lambda+\nu\vartheta)\frac{x^\nu}{\nu!}.$$

Da die linksstehende Funktion $F(x)$ vom zweiten Typus ist, so bilden die Zahlen (3.) eine Faktorenfolge zweiter Art*). Besonders interessant sind die speziellen Fälle $F(x) = \cos x$ und $F(x) = \sin x$, welche auf die merkwürdigen Faktorenfolgen zweiter Art

$$1,\ 0,\ -1,\quad 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ \ldots$$
$$0,\ 1,\quad 0,\ -1,\ 0,\ 1,\quad 0,\ \ldots$$

führen.

Ist

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m = 0$$

eine Gleichung mit lauter reellen Wurzeln (sie brauchen nicht von demselben Vorzeichen zu sein), und fallen die $m+1$ Zahlen

$$\lambda,\ \lambda+\vartheta,\ \lambda+2\vartheta,\ \ldots\ \lambda+m\vartheta$$

alle in das Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, so folgt aus dem Satz IV des § 3, daß die Gleichung

$$a_0\cos\lambda + a_1\cos(\lambda+\vartheta)x + \cdots + a_m\cos(\lambda+m\vartheta)x^m = 0$$

keine imaginäre Wurzel hat.

4. Da das Produkt zweier Funktionen vom ersten (bzw. zweiten) Typus wieder eine Funktion von demselben Typus ist, so ergibt sich die Regel:

Sind

$$\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots\ \gamma_\nu,\ \cdots$$
$$\gamma'_0,\ \gamma'_1,\ \gamma'_2,\ \cdots\ \gamma'_\nu,\ \cdots$$

zwei Faktorenfolgen erster (bzw. zweiter) Art, so bilden auch die Zahlen

$$\gamma''_\nu = \gamma_0\gamma'_\nu + \binom{\nu}{1}\gamma_1\gamma'_{\nu-1} + \binom{\nu}{2}\gamma_2\gamma'_{\nu-2} + \cdots + \gamma_\nu\gamma'_0 \qquad (\nu=0,1,2,3,\ldots)$$

eine Faktorenfolge derselben Art.

5. Gegeben seien m reelle Zahlen

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots\ \gamma_m.$$

---

*) Vgl. Einleitung. *Laguerre* (Œuvres, t. I, p. 204—205) folgert dies aus dem *Biehler*schen Satz.

Man bilde, wenn $g(x)$ ein Polynom beliebigen Grades ist, die Gleichung

$$G(x) = g(x) + \gamma_1 \frac{x g'(x)}{1!} + \gamma_2 \frac{x^2 g''(x)}{2!} + \cdots + \gamma_m \frac{x^m g^{(m)}(x)}{m!} = 0.$$

Soll diese Gleichung für *jedes* Polynom $g(x)$, dessen Nullstellen sämtlich reell sind, keine imaginäre Wurzel haben, so lautet die notwendige und hinreichende Bedingung: *es muß die Gleichung*

$$(17.) \qquad 1 + \frac{\gamma_1}{1!} x + \frac{\gamma_2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\gamma_m}{m!} x^m = 0$$

lauter reelle negative Wurzeln haben.

Verlangt man aber lediglich, daß die Gleichung

$$G(x) = 0$$

für *jedes* Polynom $g(x)$, dessen Nullstellen sämtlich reell und *von gleichem Vorzeichen* sind, keine imaginäre Wurzel haben soll, so lautet die notwendige und hinreichende Bedingung: *es muß die Gleichung* (17.) *lauter reelle Wurzeln haben**).

Setzt man nämlich

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

so wird

$$G(x) = a_0 a_0 + a_1 a_1 x + \cdots + a_m a_m x^m;$$

hierbei ist

$$\alpha_\nu = 1 + \binom{\nu}{1}\gamma_1 + \binom{\nu}{2}\gamma_2 + \binom{\nu}{3}\gamma_3 + \cdots + \binom{\nu}{m}\gamma_m \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

zu setzen.

Wir haben also nur zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Zahlen α_ν eine Faktorenfolge erster bzw. zweiter Art bilden, oder was dasselbe ist, unter welchen Bedingungen

$$\Omega(x) = \sum_0^\infty \frac{\alpha_\nu}{\nu!} x^\nu$$

eine ganze Funktion vom ersten bzw. vom zweiten Typus ist. Beachtet man nun, daß

$$\Omega(x) = e^x\left(1 + \frac{\gamma_1}{1!} x + \frac{\gamma_2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\gamma_m}{m!} x^m\right)$$

ist, so erkennt man die Richtigkeit der beiden oben aufgestellten Behauptungen.

---

*) Aus dem folgenden Beweise geht hervor, daß analoge Regeln auch dann gelten, wenn an Stelle der endlich vielen Zahlen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ unendlich viele in Betracht gezogen werden.

Setzt man z. B. $m=2$ und wählt für

$$1+\frac{\gamma_1}{1!}x+\frac{\gamma_2}{2!}x^2$$

nacheinander die drei Funktionen

$$(1+x)^2, \qquad 1+ax+ax^2 \quad (a \geqq 4), \qquad (1-x)^2,$$

so erkennt man, daß die Zahlen

$$1+\nu+\nu^2, \qquad 1+a\nu^2 \quad (a \geqq 4) \qquad (\nu=0,1,2,3,\ldots)$$

Faktorenfolgen erster Art und die Zahlen

$$1-3\nu+\nu^2 \qquad (\nu=0,1,2,3,\ldots)$$

eine Faktorenfolge zweiter Art bilden. Schon diese Beispiele scheinen neu zu sein.

§ 6. Anwendungen auf ganze transzendente Funktioneu vom Geschlechte 0 und 1.

Die Resultate der §§ 2 und 4 zeigen, daß man die ganzen Funktionen, die hier als Funktionen vom Typus I und II bezeichnet werden, auf drei verschiedene Arten charakterisieren kann. Zunächst sind sie durch die Gestalt ihrer Produktentwicklung gekennzeichnet (vgl. § 2, Formeln (I.) und (II.)). Zweitens besagen die Resultate des § 2, daß sie die einzigen analytischen Funktionen sind, die durch Polynome mit lauter reellen Nullstellen von gleichem, bzw. von beliebigem Vorzeichen approximiert werden können. Und endlich sind sie dadurch bestimmt, daß die Werte ihrer sukzessiven Ableitungen an der Stelle $x=0$ alle unendlichen Faktorenfolgen erster bzw. zweiter Art liefern.

Die zuletztgenannte Beziehung der Funktionen vom Typus I und II zu den algebraischen Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln liefert eine eigentümliche Methode zum Studium dieser Funktionen, die im folgenden zum Beweise einiger Sätze benutzt werden soll. Da unsere Funktionen vom Typus II alle ganzen Funktionen vom Geschlecht Null und Eins, deren Koeffizienten und Nullstellen reell sind, umfassen, so werden wir im folgenden einige bekannte Sätze über Funktionen vom Geschlecht 0 und 1 wiederfinden.

I. *Ist*

$$\Omega(x)=\gamma_0+\frac{\gamma_1}{1!}x+\frac{\gamma_2}{2!}x^2+\cdots$$

eine ganze Funktion vom ersten (bzw. zweiten) Typus, so ist ihre Ableitung

$$\Omega'(x) = \gamma_1 + \frac{\gamma_2}{1!}x + \frac{\gamma_3}{2!}x^2 + \cdots$$

*von demselben Typus**).

Dies folgt unmittelbar aus dem Satz V des § 1, der besagt, daß zugleich mit

$$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \cdots$$

auch die Zahlen

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \cdots$$

eine Faktorenfolge erster bzw. zweiter Art bilden.

Setzt man

$$\frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n} = (-1)^n U_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}},$$

so wird $U_n(x)$ das sog. *Hermite*sche Polynom

$$U_n(x) = x^n - \binom{n}{2} 1\, x^{n-2} + \binom{n}{4} 1 \cdot 3\, x^{n-4} - \cdots .$$

Da nun $e^{-\frac{x^2}{2}}$ eine Funktion vom Typus II ist, so ergibt sich auf Grund unseres Satzes die bekannte Tatsache, daß die Gleichung $U_n(x) = 0$ lauter reelle Wurzeln besitzt.

Eine andere Folgerung allgemeinerer Art sei noch erwähnt: Ist

$$\Psi(x) = \alpha_0 e^{-\gamma x^2 + \delta x} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + \delta_\nu x) e^{-\delta_\nu x}$$

eine Funktion vom zweiten Typus, so ist nach dem eben bewiesenen Satz I

$$\Psi'(x) = \alpha_1 e^{-\gamma' x^2 + \delta' x} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + \delta'_\nu x) e^{-\delta'_\nu x}$$

eine Funktion von demselben Typus. *Wir behaupten nun, daß* $\gamma' \geqq \gamma$ *ist.* Es seien nämlich $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ Polynome mit lauter reellen Wurzeln, die für $|x| \leqq \varrho$ gleichmäßig gegen die ganze Funktion vom zweiten Typus $e^{\gamma x^2}\Psi(x)$ konvergieren. Es ist also

$$\lim_{n=\infty} e^{-\gamma x^2} \psi_n(x) = \Psi(x).$$

Hieraus folgt für $|x| < \varrho$

$$\lim_{n=\infty} e^{-\gamma x^2}(\psi_n'(x) - 2\gamma x \psi_n(x)) = \Psi'(x).$$

Die Polynome $\psi_n' - 2\gamma x \psi_n$ haben aber lauter reelle Nullstellen, da auch $e^{-\gamma x^2}\psi_n(x)$ als Funktion vom Typus II aufzufassen ist. Daher ist nach dem Satz II des § 2

*) Vgl. *Borel*, Leçons sur les fonctions entières, p. 32.

$$\lim\,(\psi_n' - 2\gamma x\psi_n) = e^{-\gamma'' x}\,\Psi_1(x),$$

wo $\Psi_1(x)$ eine Funktion vom Geschlecht *Eins* ist und γ'' eine nicht negative reelle Konstante bedeutet. Es wird also $\gamma' = \gamma + \gamma'' \geqq \gamma$.

Auf ganz ähnliche Weise kann man ein analoges Resultat für den Typus I ableiten.

II. *Bei jeder Funktion*

$$\Psi(x) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1!}\,x + \frac{\beta_2}{2!}\,x^2 + \cdots$$

vom Typus II *bestehen die Ungleichungen*

$$\beta_\nu^2 - \beta_{\nu-1}\,\beta_{\nu+1} \geqq 0.$$

Sind β_ν und $\beta_{\nu+1}$ zugleich Null, so wird entweder $\Psi(x)$ ein Polynom, höchstens vom Grade $\nu - 1$, oder es ist $x = 0$ eine Nullstelle, deren Vielfachheit nicht unterhalb $\nu + 2$ bleibt).*

Da nämlich

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$$

eine Faktorenfolge zweiter Art bilden, so ist dieser Satz identisch mit den Sätzen II und III des § 1.

III. *Eine ganze Funktion zweiter Art, deren nicht verschwindende Koeffizienten positiv sind, ist eine Funktion erster Art der Form*

$$e^{\gamma x} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + \gamma_\nu x),$$

*wobei $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ nicht negative Zahlen sind**).*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem Satz III des § 3.

Auf Grund dieses Satzes erkennt man z. B., daß unter den Koeffizienten der Entwicklung von

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{Cx} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$$

nach Potenzen von x negative Zahlen vorkommen müssen. Diese Funktion, deren Nullstellen sämtlich negativ sind, ist nämlich zwar vom zweiten, aber nicht vom ersten Typus.

IV. *Eine Potenzreihe*

$$\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{1!}\,x + \frac{\gamma_2}{2!}\,x^2 + \cdots \tag{18.}$$

stellt dann und nur dann eine ganze Funktion vom zweiten bzw. ersten Typus dar, wenn die Gleichungen

*) Vgl. *Borel*, a. a. O. S. 35.

**) Dieser Satz scheint neu zu sein. Vgl. *Borel*, a. a. O., p. 36.

$$(19.) \qquad \gamma_0 x^n + \binom{n}{1}\gamma_1 x^{n-1} + \binom{n}{2}\gamma_2 x^{n-2} + \cdots + \gamma_n = 0$$

für jedes n lauter reelle, bzw. lauter reelle Wurzeln vom gleichen Vorzeichen besitzen.

Dieser Satz besagt nur, daß die für die Faktorenfolgen in § 3 angegebenen algebraischen Kriterien mit den transzendenten Kriterien des § 4 äquivalent sind.

Unter der Annahme, daß die Potenzreihe (18.) beständig konvergent ist und eine ganze Funktion vom Geschlecht 0 oder 1 darstellt, hat bereits Herr *Jensen* gezeigt, daß die Realität sämtlicher Wurzeln der Gleichungen (19.) eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Realität der Nullstellen der Funktion (18.) liefert*).

Wählt man insbesondere für (18.) die Funktion $e^{-\frac{x^2}{2}}$, so gehen die in (19.) linksstehenden Ausdrücke in die bereits erwähnten *Hermite*schen Polynome

$$U_n(x) = x^n - \binom{n}{2} x^{n-2} + \binom{n}{4} 1 \cdot 3\, x^{n-4} - \cdots$$

über. So ergibt sich ein neuer Beweis für die Realität der Nullstellen dieser Polynome.

V. *Ist die Funktion*

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!} x + \frac{\alpha_2}{2!} x^2 + \cdots$$

eine ganze Funktion vom ersten und

$$\beta_0 + \frac{\beta_1}{1!} x + \frac{\beta_2}{2!} x^2 + \cdots$$

eine ganze Funktion vom zweiten Typus, so ist die Reihe

$$(20.) \qquad \alpha_0\beta_0 + \frac{\alpha_1\beta_1}{1!} x + \frac{\alpha_2\beta_2}{2!} x^2 + \cdots$$

beständig konvergent, und sie stellt eine Funktion vom Typus II *dar.*

Da nämlich auf Grund der Voraussetzungen

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$$

eine Faktorenfolge erster und

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$$

eine Faktorenfolge zweiter Art ist, so ist nach Satz IV des § 1

$$\alpha_0\beta_0,\ \alpha_1\beta_1,\ \alpha_2\beta_2, \ldots$$

eine Faktorenfolge erster Art.

Dies ist die Übertragung des hier so oft benutzten Kompositionssatzes auf ganze transzendente Funktionen. Der Satz läßt sich aber auch

*) A. a. O. S. 187. Vgl. noch: *Laguerre*, Œuvres, t. I, p. 33 und p. 171.

so auffassen: Die unendlichen Faktorenfolgen erster Art (für Polynome mit lauter reellen Nullstellen) besitzen die analoge Eigenschaft auch für beliebige ganze Funktionen vom Typus II, und die unendlichen Faktorenfolgen zweiter Art (für Polynome mit lauter reellen Nullstellen von gleichem Vorzeichen) besitzen die analoge Eigenschaft auch für beliebige ganze Funktionen vom Typus I.

Kombiniert man die Funktion (20.) mit der der Faktorenfolge $\frac{1}{\nu!}$ (vgl. *A.*, § 3) entsprechenden *Bessel*schen Funktion

$$I_0(2\sqrt{-x}) = 1 + \frac{x}{1!\,1!} + \frac{x^2}{2!\,2!} + \frac{x^3}{3!\,3!} + \cdots,$$

so erkennt man, daß auch die Funktion

$$\alpha_0\beta_0 + \frac{\alpha_1\beta_1}{1!1!}\,x + \frac{\alpha_2\beta_2}{2!2!}\,x^2 + \cdots$$

vom Typus II ist.

Diese Übertragung des *Malo*schen Satzes (vgl. *A.*, § 3) auf ganze transzendente Funktionen hat schon Herr *Jensen* a. a. O. angegeben.

*Laguerre**) hat gezeigt: Ist $\Psi(x)$ eine ganze Funktion vom zweiten Typus mit lauter negativen Nullstellen und $\Phi(x)$ eine Funktion vom ersten Typus, deren Produktzerlegung die Form

$$\Phi(x) = e^{\gamma x} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + \gamma_\nu x) \qquad (\gamma \geqq 0, \gamma_\nu \geqq 0)$$

hat, so bilden die Zahlen

$$\alpha_\nu = \frac{\Psi(\nu)}{\Phi(0)\Phi(1)\cdots\Phi(\nu-1)}$$

eine Faktorenfolge erster Art. Ist also $\sum_0^\infty \beta_\nu \frac{x^\nu}{\nu!}$ eine beliebige ganze Funktion vom zweiten Typus, so ist die Potenzreihe

$$\sum_0^\infty \frac{\beta_\nu}{\nu!}\,\frac{\Psi(\nu)}{\Phi(0)\Phi(1)\cdots\Phi(\nu-1)}\,x^\nu$$

beständig konvergent, und sie stellt ebenfalls eine Funktion von demselben Typus dar. Dieses Resultat hat im wesentlichen schon Herr *Jensen* a. a. O. angegeben.

Wir beweisen zuletzt noch eine Verallgemeinerung der Sätze I und II des § 2.

VI. *Konvergiert eine Folge ganzer Funktionen*

$$\Omega_n(x) = \gamma_{n0} + \frac{\gamma_{n1}}{1!}\,x + \frac{\gamma_{n2}}{2!}\,x^2 + \cdots \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

*) Œuvres, t. I, p. 202. Vgl. jedoch *Jensen*, a. a. O. S. 190.

vom ersten (bzw. vom zweiten) Typus in einem noch so kleinen Kreise $|x| \leqq \varrho$ *gleichmäßig gegen*

$$\Omega(x) = \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{1!}\, x + \frac{\gamma_2}{2!}\, x^2 + \ldots,$$

so ist die Reihe $\Omega(x)$ *beständig konvergent, und zwar stellt sie eine ganze Funktion vom ersten (bzw. zweiten) Typus dar.*

Deutet man nämlich die Zahlenfolgen

$$\gamma_{n0}, \gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \cdots \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

als Faktorenfolgen, und beachtet man, daß auf Grund der gemachten Voraussetzungen

$$\lim_{n=\infty} \gamma_{n\nu} = \gamma_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{21.}$$

ist, so erweist sich der Satz als identisch mit dem elementaren Grenzwertsatz VI des § 1.

Der Satz VI des gegenwärtigen Paragraphen läßt sich auch aus den Resultaten des § 2 folgern mit Hilfe derselben Überlegung, die zu dem Satz führt, daß die derivierte Menge einer Punktmenge abgeschlossen ist.

Der zuerst angegebene Weg, der von dem Begriff der Faktorenfolgen Gebrauch macht, führt jedoch unmittelbar auch zur folgenden Tatsache: *Weiß man nur, daß die Funktionen* $\Omega_n(x)$ *sämtlich vom Typus* I *(bzw.* II*) sind, und daß für jedes* ν *die Gleichung* (21.) *besteht, so stellt die Reihe* $\Omega(x)$ *eine Funktion von demselben Typus dar.*

Dabei brauchen die Funktionen $\Omega_n(x)$ in keinem Bereich zu konvergieren. Dies tritt z. B. ein, wenn man setzt

$$\Omega_n(x) = (nx)^n.$$

In diesem Fall existieren die Grenzwerte γ_ν sämtlich und sind gleich Null; $\Omega(x)$ verschwindet identisch, ist also eine Funktion der verlangten Art; die Folge divergiert aber für jedes von Null verschiedene x.

Man kann aber zeigen, daß, wenn $\Omega(x)$ nicht identisch verschwindet, aus den Gleichungen (21.) die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\Omega_n(x)$ in jedem endlichen Bereich folgt*).

*) Wir beabsichtigen, demnächst auch auf die Bedeutung der hier behandelten Faktorenfolgen für algebraische Gleichungen mit imaginären Wurzeln näher einzugehen.

Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen.

Von Herrn *J. Grommer* in Göttingen.

Einleitung.

Den Ausgangspunkt dieser Arbeit bildeten diejenigen Fragen, deren Beantwortung in den letzten Paragraphen (15—17) auf Grund der gesamten vorangehenden Entwicklungen gelingt, und die eine Übertragung der bekannten Kriterien für die Realität der sämtlichen Nullstellen eines Polynoms auf ganze transzendente Funktionen betreffen. Man muß, um diese Übertragung vornehmen zu können, von der folgenden Modifikation jener Kriterien ausgehen: Das Polynom

$$(1.) \qquad g(z) = 1 + c_1 z + \cdots + c_n z^n = \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

mit lauter reellen Koeffizienten hat dann und nur dann lauter reelle Nullstellen, wenn die Determinanten

$$(2.) \qquad A_m = \begin{vmatrix} s_{-2} & s_{-3} & s_{-4} & \cdots & s_{-m-1} \\ s_{-3} & s_{-4} & s_{-5} & \cdots & s_{-m-2} \\ s_{-4} & s_{-5} & s_{-6} & \cdots & s_{-m-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{-m-1} & s_{-m-2} & s_{-m-3} & \cdots & s_{-2m} \end{vmatrix}$$

für $m = 1, \ldots n$ entweder sämtlich positiv sind oder bis zu einer bestimmten unter ihnen positiv, von da ab alle Null:

$$(3.) \quad A_1 > 0, \ldots A_\nu > 0, A_{\nu+1} = 0, \ldots A_n = 0 \quad (0 \leqq \nu \leqq n).$$

Die Größen s_{-a} sind dabei die Potenzsummen

$$(4.) \qquad s_{-a} = \frac{1}{z_1^a} + \cdots + \frac{1}{z_n^a},$$

die man aber auch, ohne von den Nullstellen zu reden, auf die beiden folgenden Arten definiert denken kann: entweder durch die *Newton*schen Formeln

$$(5^{a}.)\qquad \begin{aligned} s_{-1} &= -c_1, \\ s_{-2} &= c_1^2 - 2c_2, \\ s_{-3} &= -c_1^3 + 3c_1c_2 - 3c_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

die sich vermöge der Rekursionsformeln

$$(5^{b}.)\quad s_{-m} + c_1 s_{-m+1} + \cdots + c_{m-1}s_{-1} + m c_m = 0 \quad \text{für } m < n,$$

$$(5^{c}.)\quad s_{-m} + c_1 s_{-m+1} + \cdots\cdots\cdots + c_n s_{-m+n} = 0 \quad \text{für } m \geqq n$$

berechnen; oder — was rein formal mit $(5^{a}.)$ übereinstimmt — als Koeffizienten der Potenzentwicklung der negativ genommenen logarithmischen Ableitung der Funktion $g(z)$:

$$(6.)\qquad -\frac{g'(z)}{g(z)} = s_{-1} + s_{-2}z + s_{-3}z^2 + \cdots .$$

Tritt nun an Stelle des Polynoms $g(z)$ eine ganze transzendente Funktion mit reellen Koeffizienten,

$$(7.)\qquad g(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots,$$

so behalten die beiden letzten Definitionen der Größen s_{-a} jedenfalls ihren Sinn, und es entsteht *die Frage, was hier die Positivität der aus den s_{-a} gebildeten Determinanten A_m bedeutet**). Ist speziell $g(z)$ vom Geschlecht 0 oder 1, so behält auch die erste Definition der s_{-a} durch (4.) von s_{-2} ab ihren Sinn, und es ist alsdann nicht schwer, aus der Realität der Null-

---

*) Diese Frage hat Herr *O. Toeplitz*, auf dessen Veranlassung ich mich schon einige Zeit mit der Theorie der Kettenbrüche und der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen beschäftigt hatte, im Winter 1911/12 in seinem Seminar gestellt. Wie er damals auseinandersetzte, verdankte er die Anregung zur Aufstellung dieses Problems einer Unterhaltung mit Herrn *A. Hurwitz* in Zürich. Herr *Hurwitz* hatte sich auf ganze Funktionen vom Geschlecht 0 oder 1 beschränkt und dementsprechend auf die Definition der s_{-a} durch die Formeln (4.) gestützt; er hatte gefragt, ob eine ganze Funktion vom Geschlecht 0 oder 1, für die alle A_n positiv sind, lauter reelle Nullstellen besitzt. Herr *Toeplitz* dehnte sodann die Fragestellung auf beliebige ganze Funktionen aus, indem er sich der Formeln (5.) und (6.) zur Definition der s_{-a} bediente, bemerkte, daß bei einer Funktion $g(z) = e^{h(z)}$, wo $h(z)$ wieder ganz ist, also bei einer Funktion überhaupt *ohne* Nullstellen, die A_m nie sämtlich positiv sein können, und fragte dementsprechend, ob im allgemeinen Falle die Positivität der A_m neben der Realität der Nullstellen etwa auch noch das Geschlecht der gegebenen ganzen Funktion bedingt.

stellen in diesem Falle die Positivität der A_m zu folgern; auch ein etwa vorantretender Faktor $e^{-pz^2}(p \geqq 0)$ würde übrigens daran nichts ändern. *Das Hauptresultat dieser Arbeit* (§ 15) *ist nun, daß umgekehrt aus der Positivität der* A_m *die Realität der Nullstellen von* $g(z)$ *folgt, und zwar ohne daß man eine Annahme über das Geschlecht von* $g(z)$ *hinzuzufügen braucht; vielmehr wird aus der Positivität der* A_m *von selbst gefolgert, daß* $g(z)$ *vom Geschlecht* 0 *oder* 1 *ist, bis auf einen vorantretenden Faktor* e^{-pz^2}, *wo* $p \geqq 0$ *ist.*

Dieses Resultat und seine Verallgemeinerungen (§§ 14, 16) erscheinen lediglich als Anwendungen einer selbständigen Theorie, die in den drei ersten Kapiteln entwickelt wird. Für die Darstellung dieser Theorie habe ich die Sprechweise der Kettenbruchtheorie gewählt, jedoch so, daß deren Kenntnis nicht vorausgesetzt, sondern alles Notwendige darüber explizite entwickelt wird. Die Benutzung der *Hilbert*schen Theorie der unendlichvielen Veränderlichen aber, die in einer nicht minder engen Beziehung zum Gegenstande steht, wie die *Stieltjes*sche Kettenbruchtheorie, ist vollständig vermieden worden. Dagegen wird es an dieser Stelle notwendig sein, näher anzugeben, in welcher Beziehung die hier gegebene Darstellung zu den genannten beiden Theorien steht.

Der Grundgedanke zur Erlangung des obigen Resultats ist der, daß

$$-\frac{g'(z)}{g(z)} - s_{-1} = s_{-2}z + s_{-3}z^2 + \cdots$$

$$(8.) \qquad = \frac{t_0}{\lambda} + \frac{t_1}{\lambda^2} + \cdots \qquad \left(\lambda = \frac{1}{z}\right)$$

in einen *Kettenbruch* entwickelt wird:

$$(9.) \qquad \cfrac{t_0}{a_1 + \lambda - \cfrac{b_1^2}{a_2 + \lambda - \cfrac{b_2^2}{a_3 + \lambda - \cdots}}}$$

Es heißt dies im Grunde genommen nichts anderes als daß

$$(10.) \qquad b_n^2 = \frac{A_{n-1}\, A_{n+1}}{A_n^2}$$

gesetzt wird, wo A_n die obigen Determinanten (2.) sind, a_n gleich ähnlichen, ein wenig komplizierter gebauten rationalen Funktionen der t_n (§ 2), und daß mit diesen Größen rein formal der Kettenbruch (9.) gebildet wird. Man sieht sofort, daß die Positivität der A_n zur Folge hat, daß die Größen a_n, b_n

alle reell werden. Kettenbrüche von der Form (9.) und mit reellen Koeffizienten bilden nun gerade den Gegenstand der *Stieltjesschen Theorie**). Sie beweist, daß solche Kettenbrüche überall im Komplexen konvergieren und die Ausgangsfunktion (8.), die in unserem Falle meromorph ist, darstellen. Es wäre damit die Realität der Pole von (8.), also die Realität der Nullstellen von (7.) dargetan, wenn nicht der *Stieltjes*schen Theorie noch eine besondere Voraussetzung zugrunde gelegt wäre: die Nullstellen und Pole der Näherungsbrüche von (9.) sollen nicht nur *reell* sein, wie dies aus der Realität der a_n, b_n allein folgt, sondern *negativ*.

Nun kann man aus den durch die Formeln (2.) und (10.) definierten Größen a_n, b_n anstatt des Kettenbruches (9.) die *quadratische Form von unendlichvielen Veränderlichen*

$$(11.) \qquad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots - 2 b_1 x_1 x_2 - 2 b_2 x_2 x_3 - \cdots$$

bilden und auf sie die *Hilbertsche Theorie***) anwenden. Diese lehrt, daß die Ausgangsfunktion (8.)***) überall im Komplexen regulär ist, ohne eine der genannten *Stieltjes*schen Einschränkung korrespondierende zu benötigen. Statt dessen liegt ihr aber die andere Voraussetzung zugrunde, daß die betrachtete Form „*beschränkt*" ist; im Falle der Form (11.) bedeutet dies einfach, daß die a_n, b_n dem Betrage nach unter einer festen Grenze gelegen sind.

Der Beweis, daß diese *Hilbert*sche Einschränkung unter den vorliegenden Voraussetzungen stets erfüllt ist, bildet den Inhalt des 2. Kapitels dieser Arbeit†); im 1. Kapitel sind die notwendigen elementaren Entwicklungen der Kettenbruchtheorie in der Form, in der sie weiterhin gebraucht werden, vorangestellt.

Nachdem dies festgestellt war, war††) es unter Zuhilfenahme der

---

*) Recherches sur les fractions continues, Ann. de la fac. des sciences de Toulouse VIII (1894), IX (1895) = Mém. prés. par div. sav. à l'Acad. des sciences, Paris, 32 Nr. 2.

**) Nachr. d. Ges. d. Wiss., Göttingen, math.-phys. Kl. 1906, S. 157—199.

***) Vergl. hierzu eine Bemerkung von *Toeplitz*, Nachr. d. Ges. d. Wiss., Göttingen, math.-phys. Kl. 1910, S. 489—506, insbesondere Nr. 3, wo ersichtlich ist, daß die Ausgangsfunktion der linke oberste Koeffizient der „Resolvente" der quadratischen Form ist.

†) In Wahrheit wird dort außer der Positivität der Determinanten A_m nur vorausgesetzt, daß die Entwicklung (8.) außerhalb eines großen Kreises der λ-Ebene konvergiert, so daß damit ein allgemeines Theorem der Kettenbruchtheorie gewonnen wird.

††) Vgl. hierzu *O. Toeplitz*, Nachr. d. Ges. d. Wiss., Göttingen, math.-phys. Kl. 1910, S. 499, Anmerk. 3.

*Hilbert*schen Integraldarstellung möglich, aus den vorliegenden Voraussetzungen die „Vollstetigkeit" der Form (11.) zu folgern. *Es war nun die entscheidende Bemerkung meiner Arbeit, daß das Entwicklungstheorem, das Hilbert für die vollstetigen Formen aufgestellt hat, für meine Ausgangsfunktion* (8.) *eine Mittag-Lefflersche Partialbruchzerlegung ist, die von konvergenzerzeugenden Summanden frei ist.* Kommt man von (8.) zu (7.) und von der λ-Ebene zur z-Ebene zurück, so bedeutet dies, daß die *Weierstraß*sche Produktentwicklung von $g(z)$ nur konvergenzerzeugende Faktoren 1. Ordnung und ein Vorsatzglied 2. Ordnung enthält; das ist das oben angegebene Resultat.

Es erschien für den vorliegenden Zweck einfacher, die Redeweise der Theorie der unendlichvielen Veränderlichen durch diejenige der Kettenbruchtheorie zu ersetzen. Es wurde aber dadurch notwendig, die Integraldarstellung von *Stieltjes*, der die *Hilbert*sche korrespondiert, von der oben genannten fundamentalen Einschränkung von *Stieltjes* zu befreien, was unter Benutzung des *Hilbert*schen Gedankens der Auswahl geschieht. Dies wird im 3. Kapitel, wiederum ganz unabhängig von den *Stieltjes*schen Arbeiten, dargestellt.

Kapitel I. **Formale Entwicklungen.**

§ 1. Potenzreihe und Kettenbruchentwicklung.

Wir gehen von einer Potenzreihe

$$(1.) \qquad F \equiv \frac{t_0}{\lambda} + \frac{t_1}{\lambda^2} + \frac{t_2}{\lambda^3} + \cdots \qquad (t_0 \neq 0)$$

aus, die nach negativen Potenzen von λ fortschreitet und kein konstantes Glied enthält. *Unter der Kettenbruchentwicklung dieser Potenzreihe verstehen wir den folgenden Prozeß.* Wir schreiben

$$F \equiv \cfrac{t_0}{\cfrac{t_0}{F}}$$

und entwickeln $\frac{t_0}{F}$ nach fallenden Potenzen von λ. Diese Entwicklung beginnt offenbar mit λ; sie lautet etwa

$$\frac{t_0}{F} = \lambda + a_1 + F_1.$$

Dann ist

$$F \equiv \frac{t_0}{a_1 + \lambda + F_1},$$

und F_1 ist wieder eine Potenzreihe wie (1.), ohne konstantes Glied. Nur ist fraglich, ob in ihr der Koeffizient von $\frac{1}{\lambda}$ wiederum von Null verschieden ist. Nehmen wir nun an, daß dies tatsächlich der Fall ist, so können wir auf F_1 genau denselben Prozeß anwenden wie auf F. Ist c_1 der Koeffizient von $\frac{1}{\lambda}$ in F_1, so schreiben wir

$$F_1 \equiv \frac{c_1}{\frac{c_1}{F_1}}$$

und entwickeln $\frac{c_1}{F_1}$ nach fallenden Potenzen von λ. Wir fahren in dieser Weise fort. Stoßen wir bei diesem Prozeß auf kein F_n, bei dem der Koeffizient von $\frac{1}{\lambda}$ verschwindet, so läßt sich unsere sukzessive Division ins Unendliche fortsetzen, und wir bekommen einen unendlichen Kettenbruch

$$K \equiv \cfrac{t_0}{\lambda + a_1 + \cfrac{c_1}{\lambda + a_2 + \cfrac{c_2}{\lambda + a_3 + \cdots}}} \qquad (c_n \neq 0). \tag{2.}$$

Wir sagen, die Potenzreihe F hat den Kettenbruch K erzeugt und nennen F die Erzeugende von K.

Wird aber in einem F_n der Koeffizient von $\frac{1}{\lambda}$ Null, so kann man den Kettenbruch nicht weiter fortsetzen und bekommt

$$F \equiv \cfrac{t_0}{\lambda + a_1 + \cfrac{c_1}{\lambda + a_2 + \cdots + \cfrac{c_{n-1}}{\lambda + a_n + F_n}}}.$$

Ist dabei F_n nicht identisch Null, so läßt sich ein solches F *nicht* in einen Kettenbruch von unserer Form entwickeln.

Ist dagegen $F_n \equiv 0$, so ist F gleich einem endlichen Kettenbruch; d. h. F ist eine rationale Funktion.

Ist umgekehrt ein Kettenbruch (2.) *vorgelegt, so bestimmen wir aus ihm eine Potenzreihe $\mathfrak{P}$ durch folgenden Prozeß:*

Bezeichnen wir mit $P_n(\lambda)$, $Q_n(\lambda)$, den n-ten Näherungszähler bzw. -Nenner von K, so besteht bekanntlich die Relation

$$(3.) \qquad P_{n+1} Q_n - P_n Q_{n+1} = (-1)^n t_0 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdots c_n = c;$$

$Q_n(\lambda)$ und $P_n(\lambda)$ sind ganze rationale Funktionen *genau* vom n-ten bzw. $(n-1)$-ten Grade*).

Die rationale Funktion $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{c}{Q_n Q_{n+1}}$ ist also in eine Potenzreihe nach negativen Potenzen von λ entwickelbar, die mit $c \cdot \lambda^{-(2n+1)}$ beginnt; denn $\frac{c}{Q_n Q_{n+1}}$ verschwindet für $\lambda = \infty$, wie $\lambda^{-(2n+1)}$, d. h. die Entwicklungen von $\frac{P_n}{Q_n}$ und $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ nach Potenzen von λ^{-1} stimmen in den $2n$ ersten Koeffizienten überein. Es wird somit auch jeder spätere Näherungsbruch $\frac{P_{n+m}(\lambda)}{Q_{n+m}(\lambda)}$ in seiner Entwicklung nach Potenzen von λ^{-1} dieselben $2n$ ersten Koeffizienten haben wie die Entwicklung von $\frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)}$. Auf diese Weise wird durch K eine Potenzreihe $\mathfrak{P}$ bestimmt. $\mathfrak{P}$ hat die Eigenschaft, daß sie mit der Entwicklung des n-ten Näherungsbruches in den ersten $2n$ Koeffizienten übereinstimmt. *Wir nennen $\mathfrak{P}$ die erzeugte Potenzreihe von K und werden zeigen, daß die Erzeugende F von K, und die Erzeugte $\mathfrak{P}$ von K identisch sind,* unter der Voraussetzung, daß alle c_n von Null verschieden sind. *Es ist zunächst die Erzeugte $\mathfrak{P}$ auch zugleich eine Erzeugende von K.* Denn die Potenzreihe (nach negativen Potenzen von λ), in welche der n-te Näherungsbruch entwickelbar ist, muß diesen endlichen Kettenbruch erzeugen, weil ja die Koeffizienten $t_0, a_1, c_1, a_2, c_2, \ldots$ des Kettenbruches eindeutig aus den Koeffizienten der Potenzreihe gewonnen sind. Und zwar hängen, wie leicht zu ersehen ist, die $2n$ Koeffizienten $t_0, a_1, c_1, \ldots c_{n-1}, a_n$ nur von den $2n$ ersten Koeffizienten der erzeugenden Potenzreihe ab. Nun hat $\mathfrak{P}$ dieselben $2n$ ersten Koeffizienten wie $\frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)}$, und somit muß $\mathfrak{P}(z)$ einen Kettenbruch erzeugen, dessen n-ter Näherungsbruch mit $\frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)}$ übereinstimmt. Da dies für jedes n gilt, so wird $\mathfrak{P}$ auch den unendlichen Kettenbruch erzeugen.

---

*) Die höchsten Koeffizienten in $Q_n(\lambda)$, $P_n(\lambda)$ sind 1, bzw. $t_0 \neq 0$.

Es bleibt noch übrig zu zeigen, daß es unmöglich ist, daß zwei verschiedene Potenzreihen denselben Kettenbruch erzeugen. Oder, was dasselbe ist, wenn zwei Potenzreihen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}^*$ (ohne konstante Glieder) denselben Kettenbruch (2.) erzeugen, so ist $\mathfrak{P}^* \equiv \mathfrak{P}$. Zunächst sind die beiden ersten Koeffizienten von z und z^2 in $\mathfrak{P}(z)$ und $\mathfrak{P}^*(z)$ gleich t_0 und $-a_1 t_0$, so daß die beiden ersten Glieder von $\mathfrak{P}(z)$ und $\mathfrak{P}^*(z)$ dieselben sind. Es ist

$$\frac{t_0}{\mathfrak{P}(z)} = \lambda + a_1 + \mathfrak{P}_1(z), \quad \frac{t_0}{\mathfrak{P}^*(z)} = \lambda + a_1 + \mathfrak{P}_1^*(z).$$

Da nun $\mathfrak{P}_1(z)$, $\mathfrak{P}_1^*(z)$ ebenfalls Potenzreihen sind, die denselben Kettenbruch erzeugen, so müssen auch ihre 2 ersten Glieder übereinstimmen. Die Potenzreihen $\frac{t_0}{\mathfrak{P}(z)}$ und $\frac{t_0}{\mathfrak{P}^*(z)}$ stimmen in ihren 4 ersten Gliedern überein, und somit stimmen auch ihre Reziproken $\frac{1}{t_0}\mathfrak{P}(z)$ und $\frac{1}{t_0}\mathfrak{P}^*(z)$, oder $\mathfrak{P}(z)$ und $\mathfrak{P}^*(z)$, in den 4 ersten Gliedern überein. Ebenso kann man schließen, daß $\mathfrak{P}_1(z)$ und $\mathfrak{P}_1^*(z)$ in den 4 ersten Gliedern übereinstimmen. Dann müssen $\mathfrak{P}(z)$ und und $\mathfrak{P}^*(z)$ in den ersten 6 Gliedern übereinstimmen, usw. Es folgt schließlich, daß $\mathfrak{P}(z) \equiv \mathfrak{P}^*(z)$ ist.

Es besteht also zwischen den Potenzreihen von der Form (1.) *und den Kettenbrüchen von der Form* (2.) *eine eineindeutige Beziehung mit der einzigen Ausnahme, daß gewissen Potenzreihen kein Kettenbruch zugeordnet ist.*

Im folgenden Paragraphen werden explizite Formeln für diese Beziehung aufgestellt, aus denen sich auch ein Kriterium für diejenigen Potenzreihen ergibt, deren Kettenbruchentwicklung versagt.

§ 2. Expliziter Ausdruck der Koeffizienten des Kettenbruches durch die Koeffizienten der Potenzreihe.

Aus Formel (3.) des vorigen Paragraphen folgt, daß

$$\frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)} = \frac{t_0}{\lambda} + \frac{t_1}{\lambda^2} + \cdots + \frac{t_{2n-1}}{\lambda^{2n}} + \frac{t_{2n}^{(n)}}{\lambda^{2n+1}} + \cdots, \quad \text{wo} \quad t_{2n}^{(n)} = t_{2n} - (-1)^n t_0 c_1 c_2 \cdots c_n.$$

Setzen wir nun

$$Q_n(\lambda) = \lambda^n + g_{n,1}\lambda^{n-1} + g_{n,2}\lambda^{n-2} + \cdots + g_{n,n-1}\lambda + g_{n,n},$$

so folgt durch Multiplikation der beiden Gleichungen und Vergleichen der Koeffizienten auf beiden Seiten, daß rechts die Koeffizienten von $\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2}, \cdots \frac{1}{\lambda^{n+1}}$ verschwinden, und wir bekommen daher folgende $n+1$ homogenen Gleichungen für die Koeffizienten von $Q_n(\lambda)$:

$$(4.)\quad \begin{cases} g_{n,n}t_0 + g_{n,n-1}t_1 + \cdots + g_{n,1}t_{n-1} + 1\cdot t_n = 0, \\ g_{n,n}t_1 + g_{n,n-1}t_2 + \cdots + g_{n,1}t_n + 1\cdot t_{n+1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{n,n}t_{n-1} + g_{n,n-1}t_n + \cdots + g_{n,1}t_{2n-2} + 1\cdot t_{2n-1} = 0, \\ g_{n,n}t_n + g_{n,n-1}t_{n+1} + \cdots + g_{n,1}t_{2n-1} + 1\cdot t_{2n}^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Eliminieren wir aus (4.) die Größen $g_{n,k}$ $(k = 1, \ldots n)$, indem wir die Determinante des Gleichungssystems gleich Null setzen, und setzen wir für $t_{2n}^{(n)}$ seinen Wert

$$t_{2n}^{(n)} = t_{2n} - (-1)^n t_0 c_1 c_2 \cdots c_n$$

ein, so bekommen wir folgende Gleichungen zur Bestimmung der c_i*)

$$(5.)\qquad A_{n+1} - (-1)^n t_0 c_1 c_2 \cdots c_n A_n = 0, \qquad \text{wo}$$

$$(6.)\qquad A_n = \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_{n-1} & t_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n-2} & t_{n-1} & t_n & \cdots & t_{2n-4} & t_{2n-3} \\ t_{n-1} & t_n & t_{n+1} & \cdots & t_{2n-3} & t_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad A_0 = 1.$$

Aus (5.) folgt, wegen $A_0 = 1$, daß, wenn alle $c_n \neq 0$, auch die $A_n \neq 0$ sind, und umgekehrt.

Somit besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Potenzreihe sich in einen solchen unendlichen Kettenbruch entwickeln läßt, darin, daß die $A_n \neq 0$ sind.

Notiert man (5.) für zwei aufeinanderfolgende Werte von n:

$$(-1)^n t_0 c_1 \cdots c_n = \frac{A_{n+1}}{A_n}, \quad (-1)^{n-1} t_0 c_1 \cdots c_{n-1} = \frac{A_n}{A_{n-1}},$$

so erhält man durch Division beider Gleichungen den expliziten Ausdruck der c_n durch die t_n:

$$(7.)\qquad -c_n = \frac{A_{n+1} A_{n-1}}{A_n^2}.$$

Um auch die a_i auszudrücken, benutzen wir die Rekursionsformel:

$$Q_n(\lambda) = (a_n + \lambda) Q_{n-1}(\lambda) + c_n Q_{n-2}(\lambda).$$

Der Koeffizient $g_{n,1}$ von λ^{n-1} in $Q_n(\lambda)$ ist

$$g_{n,1} = g_{n-1,1} + a_n.$$

Lösen wir die n ersten der Gleichungen (4.) nach $g_{n,1}$ auf, so bekommen wir

$$g_{n,1} = -\frac{\bar{A}_n}{A_n},$$

wo $n \geqq 2$ und

*) Vgl. *O. Perron.* Die Lehre von den Kettenbrüchen, S. 325 (Teubner, 1913).

$$\bar{A}_n = \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_n \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-1} & t_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n-1} & t_n & \cdots & t_{2n-3} & t_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad \bar{A}_1 = t_1 .$$

Es ist somit

$$(8.) \qquad a_n = g_{n,1} - g_{n-1,1} = \frac{\bar{A}_{n-1}}{A_{n-1}} - \frac{\bar{A}_n}{A_n}.$$

Umgekehrt bestimmen sich die Koeffizienten t der Potenzreihe F eindeutig aus denjenigen $t_0 a_i c_k$ des Kettenbruches K als Polynome.

Es ist

$$\begin{aligned} t_0 &= t_0, \\ t_1 &= -\, t_0 a_1, \\ t_2 &= t_0 (a_1^2 - c_1), \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Sind $t_0, t_1, \ldots t_{2n-2}$ schon bestimmt, so folgt linear t_{2n-1} aus (8.) und dann t_{2n} aus (7.)

§ 3. Realitätsvoraussetzungen.

Wir wollen uns im folgenden nur mit solchen Kettenbrüchen beschäftigen, deren Koeffizienten a_n, c_n reell und deren Partialzähler c_n negativ sind. Unser Kettenbruch wird dann folgende Gestalt haben:

$$(9.) \qquad K(\lambda) = \cfrac{1}{a_1 + \lambda - \cfrac{b_1^2}{a_2 + \lambda - \cfrac{b_2^2}{a_3 + \lambda - \ddots}}},$$

wo a_i, b_i reell.

Gehen wir zu der erzeugenden Potenzreihe

$$F(\lambda) = \frac{t_0}{\lambda} + \frac{t_1}{\lambda^2} + \cdots$$

über, so müssen die t_i folgenden Bedingungen genügen, damit $F(\lambda)$ einen Kettenbruch von der Beschaffenheit (9.) erzeugt: sie müssen reell und die Determinanten $A_n > 0$ sein. Denn wie aus (8.) und (7.) des vorigen Paragraphen folgt, wird dann der zugehörige Kettenbruch reelle Koeffizienten mit negativen Teilzählern bekommen. Es wird nämlich

$$(10.) \qquad b_n^2 = \frac{A_{n+1} \cdot A_{n-1}}{A_n^2}. \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Ist also $A_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, so werden die b_n reell sein.

Wir wollen zusehen, welche Eigenschaften die Näherungsbrüche $\frac{P_n}{Q_n}$ von (9.) haben.

Wendet man den *Euklid*ischen Algorithmus zur Auffindung des größten gemeinsamen Teilers auf $Q_n(\lambda)$ und $P_n(\lambda)$ an, so bestehen folgende Gleichungen, wenn wir mit $Q_n^{(m)}(\lambda)$ das bezeichnen, was aus $Q_n(\lambda)$ wird, wenn man die Indizes der a_i, b_i^2 um m erhöht und $P_n = Q'_{n-1}$ setzt:

$$
\begin{aligned}
Q_n &= (a_1 + \lambda)\, Q'_{n-1} - b_1^2\, Q''_{n-2}, \\
Q'_{n-1} &= (a_2 + \lambda)\, Q''_{n-2} - b_2^2\, Q'''_{n-3}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Q_2^{(n-2)} &= (a_{n-1} + \lambda)\, Q_1^{(n-1)} - b_{n-1}^2\, Q_0^{(n)}, \\
Q_1^{(n-1)} &= (a_n + \lambda)\, Q_0^{(n)}.
\end{aligned}
\tag{11.}
$$

Die erste Gleichung (11.) folgt aus

$$
\frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{a_1 + \lambda - b_1^2 \dfrac{P'_{n-1}}{Q'_{n-1}}}, \qquad \begin{aligned} P_n &= Q'_{n-1} \\ P'_{n-1} &= Q''_{n-2}. \end{aligned}
$$

Jede folgende Gleichung (11.) folgt aus der vorhergehenden, indem man n durch $n-1$ ersetzt und die Indizes der a_i, b_i^2 um 1 erhöht.

Die Form der Gleichungen (11.) läßt erkennen, daß sie eine *Sturm*sche Kette bilden. Es hat also $Q_n(\lambda)$ lauter reelle verschiedene Nullstellen, welche durch die ebenfalls reellen Nullstellen von $P_n(\lambda)$ getrennt werden, so daß zwischen je zwei konsekutiven Nullstellen von $Q_n(\lambda)$ eine und nur eine Nullstelle von $P_n(\lambda)$ liegt.

Umgekehrt: Haben wir zwei Polynome $k(\lambda)$, $l(\lambda)$ von genau $(n-1)$-tem bzw. n-tem Grade, mit lauter reellen verschiedenen Nullstellen, und trennen die Nullstellen von $k(\lambda)$ diejenigen von $l(\lambda)$, so führt bekanntlich der *Euklid*ische Algorithmus des größten Teilers, von $k(\lambda), l(\lambda)$ zu einer *Sturm*schen Kette, und somit bekommt man für $\frac{k(\lambda)}{l(\lambda)}$ einen Kettenbruch von der Form (9.).

Wir fassen dies im folgenden Satze zusammen:

Satz I. *Es seien zwei Polynome $k(\lambda), l(\lambda)$ mit reellen Koeffizienten vom $(n-1)$-ten bzw. n-ten Grade und mit den höchsten Koeffizienten* 1 *gegeben. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ihre Nullstellen sämtlich reell und verschieden sind und daß die Nullstellen von $k(\lambda)$ diejenigen von $l(\lambda)$ trennen, ist die, daß die Determinanten*

$$A_i = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_2 & \cdots & t_{i-1} \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{i-1} & t_i & t_{i+1} & \cdots & t_{2i-1} \end{vmatrix} \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

positiv sind. Die t_i bedeuten dabei die Koeffizienten in der Entwicklung von

$$\frac{k(\lambda)}{l(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} + \frac{t_1}{\lambda^2} + \frac{t_2}{\lambda^3} + \cdots.$$

Dieser Satz ist schon von *Jacobi* und *Borchardt* auf anderem Wege abgeleitet worden.

§ 4. Über ganze rationale Funktionen mit lauter reellen Nullstellen.

Wir wenden diesen Satz I auf die logarithmische Ableitung einer ganzen rationalen Funktion an:

$$g(\lambda) = c_0 + c_1 \lambda + \cdots + c_n \lambda^n,$$
$$g'(\lambda) = c_1 + 2c_2\lambda + \cdots + n c_n \lambda^{n-1},$$
$$\frac{g'(\lambda)}{g(\lambda)} = \frac{s_0}{\lambda} + \frac{s_1}{\lambda^2} + \frac{s_2}{\lambda^3} + \cdots.$$

Die Koeffizienten $s_0, s_1, \ldots$ sind bekanntlich die Potenzsummen der Wurzeln von $g(\lambda) = 0$. Sie sind durch die folgenden *Newton*schen Rekursionsformeln bestimmt:

$$c_n s_m + c_{n-1} s_{m-1} + \cdots + c_{n-m+1} s_1 + m c_{n-m} = 0 \text{ für } m < n$$
$$c_n s_m + c_{n-1} s_{m-1} + \cdots + c_0 s_{m-n} = 0 \text{ für } m \geqq n.$$

Wenn $g(\lambda) = 0$ lauter reelle verschiedene Wurzeln hat, so werden sie durch die (ebenfalls reellen) Wurzeln von $g'(\lambda) = 0$ getrennt. Wir haben also den Satz:

Satz II. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Polynom n-ten Grades $g(\lambda)$ lauter reelle verschiedene Nullstellen hat, ist die, daß die Determinanten*

$$A_i = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{i-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{i-1} & s_i & \cdots & s_{2i-2} \end{vmatrix} \qquad (i = 1\ 2, \ldots n)$$

sämtlich positiv sind, wo s_i die Summe der i-ten Potenzen der Nullstellen von $g(\lambda)$ bedeutet.

Wir fügen diesem Satz noch einen zweiten, ähnlichen hinzu:
Es sei das Polynom

$$\varphi(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n \qquad (c_0 \neq 0,\ c_n \neq 0)$$

gegeben. Wir entwickeln die logarithmische Ableitung von $\varphi(z)$ nach Potenzen von z. Es ist bekanntlich

$$-\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = s_{-1} + s_{-2} z + s_{-3} z^2 + \cdots,$$

wo die Koeffizienten $s_{-1}, s_{-2}, s_{-3}, \ldots$ die negativen Potenzsummen der Wurzeln von $\varphi(z) = 0$ sind. Es ist also

$$c_0 s_{-m} + c_1 s_{-m+1} + \cdots + c_{m-1} s_{-1} + m c_m = 0 \qquad \text{für } m < n$$
$$c_0 s_{-m} + c_1 s_{-m+1} + \cdots\cdots\cdots + c_n s_{-m+n} = 0 \qquad \text{für } m \geqq n.$$

Zunächst, wenn wir voraussetzen, daß die Determinanten

$$A_i^{(-1)} = \begin{vmatrix} s_{-1} & s_{-2} & \cdots & s_{-i} \\ s_{-2} & s_{-3} & \cdots & s_{-i-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{-i} & s_{-i-1} & \cdots & s_{-(2i-1)} \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

positiv sind, so wird $\dfrac{-\varphi'(z)\cdot z}{\varphi(z)}$ einen Kettenbruch mit negativen Partialzählern erzeugen:

$$-\frac{\varphi'(z)\cdot z}{\varphi(z)} = \frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)},$$

wo $\lambda = \dfrac{1}{z}$ gesetzt wird. Es wird $Q_n(\lambda) = \dfrac{\varphi(z)\,\lambda^n}{c_0}$.

Da $Q_n(\lambda)$ lauter reelle verschiedene Nullstellen hat, so hat auch $\varphi(z)$ lauter reelle verschiedene Nullstellen ($\varphi(0) = c_0 \neq 0$). Wir können aber noch mehr schließen. Es ist

$$-\frac{\varphi'(z)\cdot z}{\varphi(z)} = \frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{\lambda - \lambda_i} \qquad (\lambda_i \neq 0),$$

wo die Summe rechts die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion $\dfrac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)}$ ist ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ sind die Wurzeln von $Q_n = 0$). Die Residuen $M_i = \dfrac{P_n(\lambda_i)}{Q_n'(\lambda_i)}$ sind *positive* Zahlen, da die Nullstellen von $P_n(\lambda)$ sowohl wie die von $Q_n'(\lambda)$ die Wurzeln von $Q_n(\lambda) = 0$ trennen und da beide Funktionen im Unendlichen dasselbe Vorzeichen haben. Nun ist

$$-\frac{\varphi'(z)\cdot z}{\varphi(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{\lambda - \lambda_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i z}{1 - \lambda_i z}, \qquad -\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{1 - \lambda_i z} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\dfrac{-M_i}{\lambda_i}}{z - \dfrac{1}{\lambda_i}},$$

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{M_i}{\lambda_i}}{z - \frac{1}{\lambda_i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i z_i}{z - z_i},$$

wo die $z_i\,(i = 1, 2, \ldots n)$ die Wurzeln der Gleichung $\varphi(z) = 0$ sind. Da aber die Residuen der logarithmischen Ableitung $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ sämtlich gleich 1 sein müssen, so folgt allgemein $z_i = \frac{1}{M_i}$, d. h. $\varphi(z)$ hat lauter *positive* Wurzeln.

Umgekehrt, wenn $\varphi(z) = 0$ lauter positive verschiedene Wurzeln hat, so ist

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - z_i} \quad \text{und}$$

$$-\frac{\varphi'(z)\cdot z}{\varphi(z)} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{z}{z - z_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda - \lambda_i}, \text{ wo } \lambda = \frac{1}{z},\ \lambda_i = \frac{1}{z_i} > 0.$$

Setzen wir

$$-\varphi'(z)\cdot z\cdot \lambda^n = h(\lambda), \quad \varphi(z)\,\lambda^n = g(\lambda),$$

so ist

$$\frac{h(\lambda)}{g(\lambda)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda - \lambda_i};$$

$g(\lambda)$ und $h(\lambda)$ sind Polynome vom n-ten bzw. $(n-1)$-ten Grade in λ. Die Nullstellen von $g(\lambda)$ sind $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$. Es ist dabei

$$\lambda_i = \frac{h(\lambda_i)}{g'(\lambda_i)} > 0.$$

Da $g'(\lambda_i)$ und $g'(\lambda_{i+1})$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, so müssen auch $h(\lambda_i), h(\lambda_{i+1})$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, d. h. zwischen je zwei konsekutiven Nullstellen von $g(\lambda)$ liegt eine (und nur eine) Nullstelle von $h(\lambda)$. Die rationale Funktion $\frac{h(\lambda)}{g(\lambda)}$ erzeugt also einen Kettenbruch mit negativen Teilzählern.

Nun ist

$$\frac{h(\lambda)}{g(\lambda)} = s_{-1} z + s_{-2} z^2 + \cdots.$$

Es muß also

$$A_i^{(-1)} = \begin{vmatrix} s_{-1} & s_{-2} & \cdots & s_{-i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{-i} & s_{-i-1} & \cdots & s_{-(2i-1)} \end{vmatrix} > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

sein. s_{-i} bedeutet dabei die Summe der $(-i)$-ten Potenzen der Wurzeln von $\varphi(z)=0$, die gleich den entsprechenden positiven Potenzen der Wurzeln von $g(\lambda)=0$ sind.

Wir haben somit den Satz:

Satz III. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Polynom n-ten Grades $g(\lambda)$ mit reellen Koeffizienten lauter positive verschiedene Nullstellen hat, ist die, daß die n Determinanten*

$$A_i' = \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_i \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{i+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ s_i & s_{i+1} & \cdots & s_{2i-1} \end{vmatrix}, \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

positiv sind. s_i bedeutet hierbei die Summe der i-ten Potenzen der Wurzeln von $g(\lambda)=0$, und es wird $g(0)\neq 0$ angenommen.

Beide Resultate können in folgender Weise erweitert werden: Betrachten wir die Determinanten

$$A_i^{(k)} = \begin{vmatrix} s_k & s_{k+1} & \cdots & s_{k+i-1} \\ s_{k+1} & s_{k+2} & \cdots & s_{k+i} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ s_{k+i-1} & s_{k+i} & \cdots & s_{k+2i-2} \end{vmatrix},$$

wo k fest ist und s_l die Summe der l-ten Potenzen der Nullstellen eines reellen Polynoms $g(\lambda)$ vom n-ten Grade bedeutet.

Sind nun

$$A_i^{(k)} > 0, \qquad (i=1,2,\ldots n) \tag{12.}$$

so folgt aus Satz I, daß die rationale Funktion

$$s_k z + s_{k+1} z^2 + \cdots, \qquad z = \frac{1}{\lambda} \tag{13.}$$

lauter einfache Pole hat, und zwar genau n, weil sie sich nämlich in einen endlichen Kettenbruch der Form (9.), der aus n Gliedern besteht, entwickeln läßt.

Setzen wir $g(\lambda)\cdot z^n = \varphi(z)$, so ist

$$-\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = s_1 + s_2 z + s_3 z^2 + \cdots.$$

Aus der Tatsache, daß (13.) lauter reelle einfache Pole hat, folgt, daß $\varphi(z)$ und ebenso $g(\lambda)$ lauter reelle einfache Nullstellen besitzt. Um über das Vorzeichen der Nullstellen zu entscheiden, stellen wir wieder die Resi-

duen-Betrachtung an. Da (13.) sich in einen Kettenbruch von der Form (9.), der aus n Gliedern besteht, entwickeln läßt, so ist

$$s_k z + s_{k+1} z^2 + \cdots = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{\lambda - \lambda_i}, \quad M_i > 0, \quad z = \frac{1}{\lambda}.$$

Es wird, wenn $z_i = \frac{1}{\lambda_i}$ gesetzt wird,

$$(14.) \qquad s_k z^{k-1} + s_{k+1} z^k + \cdots = -\sum_{i=1}^{n} \frac{M_i z_i z^{k-1}}{z - z_i}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{M_i z_i ((z^{k-1} - z_i^{k-1}) + z_i^{k-1})}{z - z_i} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{M_i z_i^k}{z - z_i} + P(z),$$

wo $P(z)$ ein Polynom in z ist. Es ist also auch das Residuum von $\frac{-\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ in z_i gleich $-M_i z_i^k$. Da aber das Residuum einer logarithmischen Ableitung stets *positiv* ist, so muß jedes z_i bei ungeradem k *positiv* sein.

Umgekehrt, hat ein reelles Polynom $g(\lambda)$ von genau n-tem Grade lauter reelle verschiedene Nullstellen, so sind die $A_i^{(k)} > 0$ $(i=1, \ldots n)$ für jedes gerade k. Sind die Nullstellen von $g(\lambda)$ alle *positiv* und verschieden, so gilt dasselbe auch für jedes ungerade k. Wir fassen dies im folgenden Satze zusammen:

Satz IV. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein reelles Polynom $g(\lambda)$ von genau n-tem Grade lauter* $\left\{\begin{matrix} \text{reelle} \\ \text{positive} \end{matrix}\right\}$ *verschiedene Nullstellen hat, ist die, daß die Determinanten*

$$A_i^{(k)} = \begin{vmatrix} s_k & s_{k+1} & s_{k+2} & \cdots & s_{k+i-1} \\ s_{k+1} & s_{k+2} & s_{k+3} & \cdots & s_{k+i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{k+i-1} & s_{k+i} & s_{k+i+1} & \cdots & s_{k+2i-2} \end{vmatrix} \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

sämtlich positiv sind für jedes $\left\{\begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix}\right\}$ k, *wo* s_l *die Summe der* l*-ten Potenzen der Wurzeln von* $g(\lambda) = 0$ *bedeutet; dabei wird* $g(0) \neq 0$ *angenommen.*

Kapitel II. Konvergenz des Kettenbruches bei konvergenter Potenzreihe.

§ 5. Die Behauptung.

Wir gehen von einer Potenzreihe $f(z)$ mit reellen Koeffizienten aus:

$$f(z) = z + t_1 z^2 + t_2 z^3 + \cdots.$$

Wir setzen voraus, daß die Determinanten

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-1} \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n-1} & t_n & t_{n+1} & \cdots & t_{2n-2} \end{vmatrix} > 0 \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

sind. Es wird dann $f(z)$ einen unendlichen Kettenbruch $K\left(\frac{1}{z}\right)$ mit reellen Koeffizienten und negativen Partialzählern erzeugen. $K\left(\frac{1}{z}\right)$ hat, wenn $\frac{1}{z} = \lambda$ gesetzt wird, die Form

$$K(\lambda) = \cfrac{1}{a_1 + \lambda - \cfrac{b_1^2}{a_2 + \lambda - \cfrac{b_2^2}{a_3 + \lambda - \ddots}}}, \quad a_i, b_i \text{ reell}, \; b_n^2 > 0.$$

Es ist nach (10.) des vorigen Kapitel

$$b_n^2 = \frac{A_{n+1} \cdot A_{n-1}}{A_n^2}.$$

Wir werden in dem IV. Kapitel aus der Form von $K(\lambda)$ Schlüsse über den Charakter der Funktion $f(z)$ ziehen. Zu diesem Zwecke brauchen wir folgenden Konvergenz-Satz:

Konvergenz-Satz I. *Konvergiert die Potenzreihe $f(z)$ in einem Kreise* K, *so konvergieren auch die Näherungsbrüche $\frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)}$ von $K(\lambda)$ im Innern von* K *gleichmäßig gegen $f(z)$.*

Es wird also im Innern des Konvergenzkreises K von $f(z)$

$$\operatorname{Lim}_{n=\infty} \frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)} = f(z).$$

§ 6. Zwei Hilfssätze.

Erster Hilfssatz. *Eine symmetrische Form $S^{(2m)}$ gerader Dimension $2m$ von n reellen Variabeln $\lambda_1, \ldots \lambda_n$, in welcher alle möglichen verschiedenen Produkte der Variabeln, und zwar mit dem Koeffizienten $+1$ vorkommen, ist positiv definit:*

$$S^{(2m)}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = \Sigma \lambda_1^{l_1} \lambda_2^{l_2} \cdots \lambda_n^{l_n},$$

wo $l_1, \ldots l_n$ positive ganze Zahlen inkl. Null sind, und wo über alle verschiedenen Kombinationen $l_1, \ldots l_n$ summiert wird, für welche

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_n = 2m.$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion in bezug auf die Anzahl der Variabeln. Indem wir die Variable λ_i von den übrigen auszeichnen, können wir $S^{(2m)}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ in die Form setzen:

$$S^{(2m)}(\lambda_1, \dots \lambda_n) = \lambda_i S^{(2m-1)}(\lambda_1, \dots \lambda_n) + S^{(2m)}(\lambda_1, \dots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots \lambda_n),$$

wo $S^{(2m)}(\lambda_1, \dots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots \lambda_n)$ die symmetrische Form von $n-1$ Variabeln von derselben Art ist wie $S^{(2m)}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ von n Variabeln. Diese sei als positiv definit vorausgesetzt. Sind nun alle λ_k vom gleichen Vorzeichen, so wird jedes Glied in $S^{(2m)}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ positiv sein; sind aber die λ_k von verschiedenen Vorzeichen, so wählen wir das λ_i so aus, daß λ_i das gleiche Vorzeichen wie $S^{(2m-1)}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ hat, dessen Wert von der Wahl des λ_i nicht abhängt. Es wird dann

$$S^{(2m)}(\lambda_1, \dots \lambda_n) = \lambda_i S^{(2m-1)}(\lambda_1, \dots \lambda_n) + S^{(2m)}(\lambda_1, \dots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots \lambda_n)$$

als eine Summe zweier positiven Größen selbst positiv sein. Es ist somit unser erster Hilfssatz bewiesen, da er für eine Variable richtig ist.

Zweiter Hilfssatz. *Es sei $A(\lambda)$ ein Polynom n-ten Grades in λ,*

$$A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0.$$

Die Nullstellen von $A(\lambda)$ seien sämtlich reell. Entwickelt man $\frac{1}{A(\lambda)}$ nach Potenzen von $z = \frac{1}{\lambda}$, so werden die Koeffizienten von $\left\{\begin{matrix} geraden \\ ungeraden \end{matrix}\right\}$ Potenzen von z positiv sein bei $\left\{\begin{matrix} geradem \\ ungeradem \end{matrix}\right\}$ n.

Beweis. Bezeichnen wir die Nullstellen von $A(\lambda)$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$, so wird

$$\frac{1}{A(\lambda)} = \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_1}\right)\left(\frac{1}{\lambda - \lambda_2}\right) \cdots \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_n}\right).$$

Nun ist, wenn $z = \frac{1}{\lambda}$,

$$\frac{1}{\lambda - \lambda_i} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{1 - \frac{\lambda_i}{\lambda}}\right) = z + \lambda_i z^2 + \lambda_i^2 z^3 + \cdots,$$

mithin

$$\frac{1}{A(\lambda)} = \prod_{i=1}^{n} [z + \lambda_i z^2 + \lambda_i^2 z^3 + \cdots] = z^n \prod_{i=1}^{n} [1 + \lambda_i z + \lambda_i^2 z^2 + \cdots].$$

Der Koeffizient von einer $\left\{\begin{matrix} \text{geraden} \\ \text{ungeraden} \end{matrix}\right\}$ Potenz von z wird bei $\left\{\begin{matrix} \text{geradem} \\ \text{ungeradem} \end{matrix}\right\}$ n gleich sein dem Ausdruck $\Sigma \lambda_1^{l_1} \lambda_2^{l_2} \dots \lambda_n^{l_n}$, wo $l_1, \dots l_n$ positive ganze Zahlen sind, und es wird über alle möglichen verschiedenen Kombinationen

$l_1, \dots l_n$ summiert, wo $l_1 + l_2 + \cdots + l_n = 2m$ für irgendein festes m. Nun ist $\Sigma \lambda_1^{l_1}, \dots \lambda_n^{l_n}$ nach unserm ersten Hilfssatze *positiv definit*, und somit ist unser zweiter Hilfssatz bewiesen.

§ 7. Der Beweis.

Bevor wir nun zum Beweise des Satzes I schreiten, beweisen wir

Satz II. *Der Konvergenzkreis* K_n *der Potenzentwicklung des n-ten Näherungsbruches von* $K(\lambda)$

$$\text{(15.)} \qquad \frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)} = z + t_1^{(n)} z^2 + t_2^{(n)} z^3 + \cdots$$

ist mindestens so groß wie der Konvergenzkreis K *der Potenzreihe* $f(z)$ *selbst.*

Wir zeigen zuerst, daß die Koeffizienten $t_{2m}^{(n)}$ der *ungeraden* Potenzen von z in (15.) mit wachsendem n selbst wachsen:

$$\text{(16.)} \qquad 0 \leqq t_{2m}^{(1)} \leqq t_{2m}^{(2)} \leqq \cdots \leqq t_{2m}^{(m+1)} = t_{2m}^{(m+2)} = \cdots = t_{2m}.$$

Da nämlich

$$\frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)} - \frac{P_{n-1}(\lambda)}{Q_{n-1}(\lambda)} = \frac{b_1^2 b_2^2 \cdots b_{n-1}^2}{Q_n(\lambda) \cdot Q_{n-1}(\lambda)}$$

ist, so wird $\dfrac{t_{2m}^{(n)} - t_{2m}^{(n-1)}}{b_1^2 \cdots b_{n-1}^2}$ gleich sein dem Koeffizienten von z^{2m+1} in der Entwicklung von $\dfrac{1}{Q_n \cdot Q_{n-1}}$ nach Potenzen von z, der aber nach unserm zweitem Hilfssatze *positiv* ist. Aus (16.) entnehmen wir insbesondere:

$$\text{(17.)} \qquad 0 \leqq t_{2m}^{(n)} \leqq t_{2m}.$$

Die Behauptung des Satzes II kann man als Formel so ausdrücken:

$$\text{(18.)} \qquad \operatorname*{Lim\,sup}_{i=\infty} \sqrt[i]{|t_i^{(n)}|} \leqq \operatorname*{Lim\,sup}_{i=\infty} \sqrt[i]{|t_i|}.$$

Nun folgt aus (17.)

$$\text{(18}^{\text{a}}\text{.)} \qquad \operatorname*{Lim\,sup}_{m=\infty} \sqrt[2m]{|t_{2m}^{(n)}|} \leqq \operatorname*{Lim\,sup}_{m=\infty} \sqrt[2m]{|t_{2m}|}.$$

Wir werden (18.) und somit unseren Satz II beweisen, indem wir zeigen, daß

$$\text{(18}^{\text{b}}\text{.)} \qquad \operatorname*{Lim\,sup}_{m=\infty} \sqrt[2m+1]{|t_{2m+1}^{(n)}|} \leqq \operatorname*{Lim\,sup}_{m=\infty} \sqrt[2m]{|t_{2m}^{(n)}|}.$$

Es ist

$$\frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{\lambda - \lambda_i}, \quad M_i = \frac{P_n(\lambda_i)}{Q_n'(\lambda_i)} > 0.$$

Es wird

$$t_{2m}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} M_i \lambda_i^{2m}, \quad t_{2m+1} = \sum_{i=1}^{n} M_i \lambda_i^{2m+1}.$$

Nun ist

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{m=\infty} \sqrt[2m]{|t_{2m}^{(n)}|} = \operatorname*{Lim\,sup}_{m=\infty} \sqrt[2m]{\sum_{i=1}^{n} M_i \lambda_i^{2m}} = \operatorname*{Lim\,sup}_{m=\infty} \sqrt[2m+1]{\sum_{i=1}^{n} M_i |\lambda_i|^{2m+1}}$$

$$\geqq \operatorname*{Lim\,sup}_{m=\infty} \sqrt[2m+1]{\left|\sum_{i=1}^{n} M_i \lambda_i^{2m+1}\right|} = \operatorname*{Lim\,sup}_{m=\infty} \sqrt[2m+1]{|t_{2m+1}^{(n)}|}.$$

Es ist also (18^b.), (18.) und somit unser Satz II bewiesen.

Wir können den Inhalt des Satzes II auch dahin formulieren, daß die Pole $z_i = \frac{1}{\lambda_i}$ jedes Näherungsbruches außerhalb des Kreises K liegen, daß also, wenn R dessen Radius bezeichnet:

$$|\lambda_i| \geqq \frac{1}{R} \tag{19.}$$

ist*).

Nun können wir endlich leicht den Konvergenz-Satz I beweisen. Es ist

$$\frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{\lambda - \lambda_i}.$$

Für

$$|z| \leqq R - \delta, \quad |\lambda| \geqq \frac{1}{R-\delta}, \tag{20.}$$

wo δ eine beliebige positive Größe ist, die festgehalten wird, wird

$$|\lambda - \lambda_i| \geqq |\lambda| - |\lambda_i| \geqq \frac{1}{R-\delta} - \frac{1}{R} = \frac{1}{c}.$$

Es wird

$$\left|\frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)}\right| \leqq \sum_{i=1}^{n} |M_i| c = c,$$

da $\sum_{i=1}^{n} M_i = 1, \quad M_i > 0.$

Nach der *Cauchy*schen Koeffizienten-Abschätzung ist für $|z| \leqq R - \delta$

$$|t_\nu^{(n)}| \leqq \frac{c}{(R-\delta)^{\nu+1}}. \tag{21.}$$

Wir zeigen nun, daß, wenn uns ein beliebig kleines ε vorgegeben ist, wir ein $N(\varepsilon)$ bestimmen können, so daß für $n \geqq N(\varepsilon)$

$$\left|f(z) - \frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)}\right| \leqq \varepsilon \tag{22.}$$

ist für

$$|z| \leqq R - 2\delta. \tag{23.}$$

---

*) Es kann gefolgert werden, daß die $|a_n|$, b_n^2 eine obere Schranke haben.

Ist uns ε gegeben, so bestimmen wir ein $N(\varepsilon)$ so, daß für (23.)

$$(24.) \qquad \left| f(z) - \sum_{\nu=1}^{N-1} t_{\nu-1} z^{\nu} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}, \quad t_0 = 1 \qquad \text{und}$$

$$(25.) \qquad \frac{c \cdot \vartheta^N}{1-\vartheta} \leqq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{wo} \quad \vartheta = \frac{R-2\delta}{R-\delta} < 1.$$

Es wird

$$(26.) \qquad \left| \frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)} - \sum_{\nu=1}^{N-1} t_{\nu-1}^{(n)} z^{\nu} \right| = \left| \sum_{\nu=N}^{\infty} t_{\nu-1}^{(n)} z^{\nu} \right| \leqq c \sum_{\nu=N}^{\infty} \vartheta^{\nu} \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

nach (25.), (21.), für (23.).

Nun ist für $n \geqq N$ $t_{\nu}^{(n)} = t_{\nu}$ für $\nu \leqq N$. Es ist also auch

$$(27.) \qquad \left| \frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)} - \sum_{\nu=1}^{N-1} t_{\nu-1} z^{\nu} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}, \; n \geqq N.$$

Subtrahiert man (24.) von (27.), so bekommt man (22.). Es ist somit der *Konvergenz-Satz* I bewiesen.

Kapitel III. Darstellung des Kettenbruches durch ein bestimmtes Integral.

§ 8. Bildung von Belegungsfunktionen aus den Partialbruchzerlegungen.

In diesem Kapitel gehen wir von dem Kettenbruch $K(\lambda)$, der reelle Koeffizienten und negative Teilzähler hat, aus:

$$K(\lambda) = \cfrac{1}{a_1 + \lambda - \cfrac{b_1^2}{a_2 + \lambda - \cfrac{b_2^2}{a_3 + \lambda - \ddots}}}, \quad a_i, b_i \text{ reell}, \; b_i \neq 0.$$

Wir bezeichnen den n-ten Näherungsbruch von $K(\lambda)$ mit $\frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)}$, und es ist

$$(28.) \qquad \frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i^{(n)}}{\lambda - \lambda_i^{(n)}}, \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

wo $\lambda_1^{(n)}, \ldots \lambda_n^{(n)}$ die n Nullstellen von $Q_n(\lambda)$ sind, die wir übrigens der Größe nach geordnet denken, und

$$M_i^{(n)} = \frac{P_n(\lambda_i)}{Q_n'(\lambda_i)} > 0, \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

wie es im Kapitel I dargetan wurde. Wir wollen ein Analogon zu der Partialbruchzerlegung (28.) für die Darstellung des unendlichen Kettenbruches $K(\lambda)$ gewinnen. Und zwar werden wir die Summe (28.) durch ein *Integral* ersetzen. Auch den n-ten Näherungsbruch selber werden wir durch ein Integral darstellen.

Zu diesem Zwecke bilden wir, mit *Stieltjes*, zu jedem Näherungsbruch $\frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)}$ eine reelle Funktion $\varphi_n(u)$ einer reellen Variabeln u. Diese Funktion $\varphi_n(u)$ wird eine monoton wachsende sein, genauer gesagt: streckenweise konstant, mit genau n Sprungstellen, an deren jeder sie wächst. Das Bildungsgesetz von $\varphi_n(u)$ ist folgendes:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_n(u) = 0 && \text{für} && u < \lambda_1^{(n)},\\
&\varphi_n(u) = M_1^{(n)} && ,, && \lambda_1^{(n)} \leqq u < \lambda_2^{(n)},\\
&\varphi_n(u) = M_1^{(n)} + M_2^{(n)} && ,, && \lambda_2^{(n)} \leqq u < \lambda_3^{(n)},\\
&\cdots\cdots\cdots

Wir bilden die Integrale

$$I_n^{(k)} = \int_c^\infty \Big(\sum_{i=1}^{n} M_i^{(n)} - \varphi_n(u) \Big) u^k \, du$$

und

$$I_{n+m}^{(k)} = \int_c^\infty \Big(\sum_{i=1}^{n+m} M_i^{(n+m)} - \varphi_{n+m}(u) \Big) u^k \, du,$$

wo c kleiner als die kleinsten Wurzeln von $Q_n(\lambda) = 0$ und $Q_{n+m}(\lambda) = 0$ ist, so daß nach (29.) $\varphi_n(c) = \varphi_{n+m}(c) = 0$. Wir zeigen zuerst, daß

(33.) $$I_n^{(k)} = I_{n+m}^{(k)}. \qquad (k = 0, 1, \ldots 2n-2)$$

Es ist

$$I_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} M_i^{(n)} \int_c^{\lambda_1^{(n)}} u^k \, du + \sum_{i=2}^{n} M_i^{(n)} \int_{\lambda_1^{(n)}}^{\lambda_2^{(n)}} u^k \, du + \cdots + M_n^{(n)} \int_{\lambda_{n-1}^{(n)}}^{\lambda_n^{(n)}} u^k \, du$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} M_i^{(n)} \cdot \frac{c^{k+1}}{k+1} + M_1^{(n)} \cdot \frac{(\lambda_1^{(n)})^{k+1}}{k+1} + \cdots M_n^{(n)} \frac{(\lambda_n^{(n)})^{k+1}}{k+1}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} M_i^{(n)} \cdot \frac{c^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{n} M_i^{(n)} (\lambda_i^{(n)})^{k+1}.$$

Analog ist

$$I_{n+m}^{(k)} = -\sum_{i=1}^{n+m} M_i^{(n+m)} \cdot \frac{c^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{n+m} M_i^{(n+m)} \cdot (\lambda_i^{(n+m)})^{k+1},$$

und somit ist $I_n^{(k)} = I_{n+m}^{(k)}$ nach (32.). Es ist also

$$I_n^{(k)} - I_{n+m}^{(k)} = \int_c^\infty (\varphi_{n+m}(u) - \varphi_n(u)) u^k \, du = 0 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots 2n-2.$$

Wir fassen diese $2n-1$ Gleichungen in eine Gleichung zusammen.

(34.) $$\int_c^\infty (\varphi_{n+m}(u) - \varphi_n(u)) \, g_{2n-2}(u) \, du = 0,$$

wo $g_{2n-2}(u)$ ein beliebiges Polynom ist, dessen Grad $2n-2$ nicht überschreitet. Hieraus folgt, daß $\varphi_{n+m} - \varphi_n$ mindestens $(2n-1)$-mal das Vorzeichen wechseln muß. Denn würde $\varphi_{n+m} - \varphi_n$ nur l-mal das Vorzeichen wechseln, wo $l \leqq 2n-2$ ist, so bestimme man ein Polynom l-ten Grades $g_l(u)$ so, daß seine l Nullstellen die l Stellen der Vorzeichenwechsel von $\varphi_{n+m} - \varphi_n$ sind. $\int_c^\infty (\varphi_{n+m} - \varphi_n) \, g_l(u) \, du$ würde dann aus Elementen bestehen, welche gleiches Vorzeichen besitzen, und somit kann es nicht verschwinden, da $\varphi_{n+m} - \varphi_n \not\equiv 0$, und $g^{(l)} \not\equiv 0$ ist. Es muß also $\varphi_{n+m} - \varphi_n$ mindestens $(2n-1)$-mal, das Vorzeichen wechseln. Nun ist für $u < \lambda_1^{(n)}$ $\varphi_{n+m} - \varphi_n \geqq 0$, und für $u > \lambda_n^{(n)}$ $\varphi_{n+m} - \varphi_n \leqq 0$. Die Vorzeichenwechsel von $\varphi_{n+m} - \varphi_n$

können also nur im Intervalle $\lambda_1^{(n)} \leqq u \leqq \lambda_{n-1}^{(n)}$ vorkommen. In einem Intervall $\lambda_{i-1}^{(n)} < u < \lambda_i^{(n)}$ kann $\varphi_{n+m} - \varphi_n$ höchstens einen Vorzeichenwechsel aufweisen, da $\varphi_n(u)$ in diesem Intervalle konstant ist und $\varphi_{n+m}(u)$ monoton wächst. Die Anzahl solcher Intervalle ist $n-1$. Die noch fehlenden n Vorzeichenwechsel müssen also in den Punkten $\lambda_i^{(n)}$ eintreten. Es ist somit die Behauptung $\varphi_n(\lambda_i^{(n)} - 0) < \varphi_{n+m}(\lambda_i^{(n)}) < \varphi_n(\lambda_i^{(n)})$ des Satzes I bewiesen.

§ 9. Ein Auswahlverfahren.

In diesem Paragraphen beweisen wir folgenden Satz:

Satz II. *Es ist möglich, eine solche Auswahl von Näherungsbrüchen* $\frac{P_{n_h}(\lambda)}{Q_{n_h}(\lambda)}$ *zu treffen, daß* $\operatorname{Lim}_{h=\infty} \frac{P_{n_h}(\lambda)}{Q_{n_h}(\lambda)}$ *gleichmäßig existiert*) in jedem Gebiete G in der λ-Ebene mit endlichen Abzissen, welches einen von Null verschiedenen minimalen Abstand von der reellen Achse hat, und es wird*

$$(35.) \qquad \operatorname{Lim}_{h=\infty} \frac{P_{n_h}(\lambda)}{Q_{n_h}(\lambda)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Psi(u)}{\lambda - u} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dX(u)}{\lambda - u} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi(u)}{\lambda - u} \text{**}),$$

*wo****)

$$(36.) \qquad \Psi(u) = \operatorname{Lim}_{h=\infty} \sup \varphi_{n_h}(u),$$

$$(37.) \qquad X(u) = \operatorname{Lim}_{h=\infty} \inf \varphi_{n_h}(u),$$

$$(38.) \qquad \Phi(u) = \frac{p \cdot \Psi(u) + q\, X(u)}{p+q}$$

und $p \geqq 0$, $q \geqq 0$, $p+q > 0$ *sind, sonst beliebig.*

Wir werden bei unserer Auswahl mehrmals ein Verfahren anwenden, daß wir besonders formulieren und kurz mit „Diagonalverfahren“

---

*) Wir werden im nächsten Paragraphen sehen, daß dieser Limes *ohne Auswahl* auch im Komplexen nicht zu existieren braucht. Unter den von *Stieltjes* gemachten besonderen Annahmen tritt dies allerdings nicht ein. Der Gedanke der Auswahl tritt erst in der Theorie der unendlich vielen Veränderlichen von *Hilbert* auf.

**) Mit *Stieltjes* verstehen wir hierbei unter $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ den Limes von $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})]$, falls er existiert, also einen Begriff, der für $g(x) = x$ das Integral im *Riemann*schen Sinne ergibt. Daß die oben auftretenden Integrale tatsächlich existieren, ist wegen der Monotonität der Funktionen Ψ, X, Φ leicht einzusehen.

***) Die Limites existieren offenbar, weil nach (30.) $0 \leqq \varphi_n \leqq 1$.

bezeichnen wollen. Es sei eine Menge $\mathfrak{M}$ aus abzählbar unendlich vielen Elementen, welche nach dem Typus der ganzen Zahlen geordnet sind, gegeben. Sie habe eine unendliche Teilmenge $\mathfrak{M}_1$, die eine gewisse Eigenschaft E_1 besitzt; $\mathfrak{M}_1$ habe wieder eine unendliche Teilmenge $\mathfrak{M}_2$, die eine Eigenschaft E_2 besitzt, usw. Wir bekommen auf diese Weise unendlich viele ineinander eingeschaltete Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$, so daß der Menge $\mathfrak{M}_n$ die Eigenschaft E_n zukommt. Die Anordnung der Elemente in jedem $\mathfrak{M}_n$ sei dieselbe wie in $\mathfrak{M}$. Jede Eigenschaft E_n sei von der Art, daß 1) jede Teilmenge von $\mathfrak{M}_n$ die Eigenschaft E_n besitzt, und 2), daß die Eigenschaft E_n der Menge $\mathfrak{M}_n$ nicht verloren geht, wenn *endlich* viele Elemente aus $\mathfrak{M}$ zu $\mathfrak{M}_n$ hinzugefügt werden.

Wir behaupten, daß es (unter diesen Voraussetzungen) eine unendliche Teilmenge $\overline{\mathfrak{M}}$ von $\mathfrak{M}$ gibt, die *jede* Eigenschaft E_n zugleich besitzt. Wir bestimmen nämlich $\overline{\mathfrak{M}}$, indem wir das k-te Element von $\mathfrak{M}_k$ als k-tes Element für $\overline{\mathfrak{M}}$ setzen. Offenbar ist das k-te Element von $\mathfrak{M}_k$ später als das i-te Element von $\mathfrak{M}_i$, wenn $i < k$ ist, so daß $\overline{\mathfrak{M}}$ aus lauter verschiedenen Elementen besteht. Die so definierte Menge $\overline{\mathfrak{M}}$ besitzt offenbar *jede* Eigenschaft E_n, da $\mathfrak{M}_n$ die Eigenschaft E_n besitzt, und $\overline{\mathfrak{M}}$, abgesehen von ihren $n-1$ ersten Elementen, eine Teilmenge von $\mathfrak{M}_n$ ist.

Wir denken uns nun die reelle u-Achse in den Punkten $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ in Intervalle geteilt, wobei zu einem Intervall immer sein rechter Endpunkt gehören soll. Wir nennen ein Intervall ein solches erster Art, wenn in ihm *nur endlich viele* $\varphi_n(u)$ *keinen Sprung haben.* In einem solchen Intervalle hat jedes $\varphi_n(u)$ von einer gewissen Stelle n an einen Sprung. Und wir nennen ein Intervall ein solches zweiter Art, wenn in ihm *unendlich viele* $\varphi_n(u)$ *keinen Sprung haben.* Wir wollen zunächst eine solche Auswahl von unendlich vielen $\varphi_{n_h}(u)$ treffen, daß in bezug auf diese Auswahl in jedem Intervalle zweiter Art *nicht nur unendlich viele* $\varphi_{n_h}(u)$ keinen Sprung haben, sondern *alle* $\varphi_{n_h}(u)$ von einem gewissen n_h an *keinen Sprung haben.* Ein solches Intervall zweiter Art nennen wir *regulär.*

Wir gehen zunächst — um dies jetzt auszuführen — von der Strecke -1 bis $+1$ auf der u-Achse aus. Sind die beiden Intervalle $(-1, 0)$, $(0, +1)$ von erster Art, so machen wir keine Auswahl und behalten die Gesamtmenge der φ_n bei. Sind dagegen nicht beide Intervalle von erster Art, so fassen wir unter diesen beiden das linkeste Intervall zweiter Art

ins Auge und wählen diejenigen unendlich vielen $\varphi_n(u)$ aus, die in ihm keinen Sprung haben. Diese Menge von φ_n heiße A_1. Ist in bezug auf A_1 das zweite Intervall von erster Art, so behalten wir A_1 bei. Ist dagegen in bezug auf A_1 das zweite Intervall von zweiter Art, dann gibt es unendlich viele Elemente von A_1, die in ihm keinen Sprung haben und die eine Teilmenge A_2 von A_1 bilden. Wir behalten dann diese Teilmenge A_2 bei. Wir bekommen jedenfalls eine unendliche Menge, sie heiße D_{11}, so daß in bezug auf D_{11} jedes Intervall zweiter Art auf der Strecke $(-1, +1)$ *regulär* ist. Wir betrachten jetzt die vier Intervalle auf der Strecke $(-2, +2)$ und bestimmen das linkeste Intervall zweiter Art in bezug auf D_{11}. In diesem Intervalle gibt es unendlich viele Elemente, die keinen Sprung haben und die eine Teilmenge von D_{11} bilden. In bezug auf diese Teilmenge suchen wir wieder das nächste Intervall zweiter Art auf, usw. Wir bekommen eine Menge D_{12}, so daß in bezug auf sie jedes Intervall zweiter Art auf der Strecke $(-2, +2)$ regulär ist. Wir fahren in dieser Weise fort und bekommen unendlich viele Mengen $D_{11}, D_{12}, D_{13}, \ldots$, wo jede folgende eine Teilmenge der vorhergehenden ist. D_{1n} hat die Eigenschaft, daß in bezug auf sie jedes Intervall zweiter Art auf der Strecke $(-n, +n)$ regulär ist. Jede Menge D_{1n} denken wir uns geordnet nach der Größe der Indizes von φ_k. Nach unserem „Diagonalverfahren" können wir nun eine unendliche Menge D_1 bestimmen, die für jedes n auf der Strecke $(-n, +n)$, also auf der ganzen u-Achse, die gewünschte Eigenschaft hat, daß jedes Intervall zweiter Art in bezug auf D_1 regulär ist. D_1 ist so bestimmt, daß ihr k-tes Element das k-te Element von D_{1k} ist.

Wir denken uns jetzt die Intervalle zweiter Art in bezug auf D_1 numeriert wie folgt. I_1 sei das nächstgelegene Intervall zweiter Art rechts vom Nullpunkt, I_2 das nächstgelegene links vom Nullpunkt, I_3 das zweitnächstgelegene rechts, I_4 das zweitnächstgelegene links, usw. Wir wählen wieder aus D_1 eine solche unendliche Teilmenge Δ_{11} aus, für welche $L\,\varphi_{n_h}(u_1)$ existiert, wo u_1 der rechte Endpunkt von I_1 ist. Man wähle z. B. Δ_{11} so, daß sie nach dem Lim sup der Menge D_1 in u_1 konvergiert. Aus Δ_{11} wählen wir wieder eine unendliche Teilmenge Δ_{12} aus, die auch in dem rechten Endpunkt von I_2 konvergiert, usw. Auf diese Weise entstehen unendlich viele Mengen $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}, \ldots$. Nach unserem „Diagonalverfahren" gibt es eine unendliche Menge Δ_1, die in jedem rechten Endpunkt

eines Intervalles zweiter Art konvergiert. (Das k-te Element von Δ_1 ist das k-te Element von Δ_{1k}). Da aber Δ_1, als Teilmenge von D_1, zugleich die Eigenschaft hat, daß jedes Intervall zweiter Art in bezug auf sie regulär ist, so folgt daraus, daß sie in *jedem* Punkte eines Intervalles zweiter Art konvergiert; denn in einem regulären Intervall zweiter Art haben nur endlich viele $\varphi_n(u)$ einen Sprung, so daß für $n > N$ alle $\varphi_n(u)$ in ihm konstant sind. Es existiert somit $\operatorname{Lim} \varphi_{n_h}(u)$, wenn u ein Punkt eines (regulären) Intervalles zweiter Art ist.

Wir hatten die reelle Achse in den ganzzahligen Punkten $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ geteilt und zu dieser Einteilung eine unendliche Teilmenge Δ_1 mit der obigen Eigenschaft gefunden. Durch Halbieren der ursprünglichen Intervalle bekommen wir eine andere Einteilung der reellen Achse in kleinere Intervalle, und für diese neue Einteilung bestimmen wir aus Δ_1 eine Teilmenge Δ_2, die in jedem Punkte eines Intervalles zweiter Art bei dieser neuen Einteilung konvergiert. Wir setzen dieses Verfahren durch sukzessives Halbieren der Intervalle fort und bekommen unendlich viele Mengen $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$, wo jede folgende eine Teilmenge der vorhergehenden ist. Nach unserem „Diagonalverfahren" *gibt es eine unendliche Menge* Δ *von* φ_{n_h}, *welche in jedem Punkte eines Intervalles zweiter Art bei jeder Einteilung (durch sukzessives Halbieren) konvergiert,* wobei wir als Intervall zweiter Art ein solches bezeichnen, in welchem unendlich viele φ_{n_h} *keinen* Sprung haben.

Wir gehen nun von der Menge Δ der φ_{n_h} aus*).

Das Integral in (35.) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi(u)}{\lambda - u}$ läßt sich partiell integrieren, und es ist

$$(39) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi(u)}{\lambda - u} = \left[\frac{\Phi(u)}{\lambda - u}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(u)}{(\lambda - u)^2}\, du = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(u)}{(\lambda - u)^2}\, du.$$

Das letzte Integral hat offenbar einen Sinn, da $\Phi(u)$ monoton wächst und kleiner als 1 ist. Seine Konvergenz ist (in Anbetracht der unendlichen Integrationsgrenzen) gleichmäßig in einem Gebiet der λ-Ebene, welches endliche Abzissen hat. Denn setzen wir $\lambda = \mu + i\nu$, $|\mu| < M$, so kann man, wenn ein beliebig kleines ε vorgegeben ist, ein $L(\varepsilon)$ bestimmen, so daß

*) Der Kürze halber lassen wir weiter den Index h in φ_{n_h} weg.

$$(40.)\quad \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(u)}{(\lambda-u)^2}\,du-\int_{-L}^{+L}\frac{\Phi(u)}{(\lambda-u)^2}\,du\right|$$
$$\leqq\left|\int_{-\infty}^{-L}\frac{1}{(M+u)^2}\,du\right|+\left|\int_{L}^{\infty}\frac{1}{(M-u)^2}\,du\right|=\frac{2}{L-M}\leqq\varepsilon.$$

Wir beweisen Satz II, indem wir zeigen, daß

$$(41.)\ \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)}=\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varphi_n(u)}{\lambda-u}=\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi_n(u)}{(\lambda-u)^2}\,du\right\}=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(u)}{(\lambda-u)^2}\,du$$

gleichmäßig für das Gebiet G aus Satz II, wo die φ_n aus der Menge Δ entnommen sind. Da ebenso wie (40.) auch

$$(42.)\qquad \left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_n(u)}{(\lambda-u)^2}\,du-\int_{-L}^{+L}\frac{\varphi_n(u)}{(\lambda-u)^2}\,du\right|<\varepsilon$$

für genügend großes L, und zwar unabhängig von n gleichmäßig für das Gebiet G, so wird (41.) bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß

$$(43.)\qquad \left|\int_{-L}^{+L}\frac{\Phi(u)}{(\lambda-u)^2}\,du-\int_{-L}^{+L}\frac{\varphi_n(u)}{(\lambda-u)^2}\,du\right|$$

beliebig klein ist für genügend große n, gleichmäßig für alle λ im Gebiete G.

Nun ist in diesem Gebiete G, wenn man $\lambda=\mu+i\nu$ setzt, $|\nu|\geqq\nu_0>0$. Es ist somit

$$(44.)\quad \left|\int_{-L}^{+L}\frac{\Phi(u)}{(\lambda-u)^2}\,du-\int_{-L}^{+L}\frac{\varphi_n(u)}{(\lambda-u)^2}\,du\right|\leqq\frac{1}{\nu_0^2}\int_{-L}^{+L}|\Phi(u)-\varphi_n(u)|\,du.$$

Von diesem letzten Integrale behaupten wir, daß es für große n beliebig klein wird, wobei die φ_n aus unserer Menge Δ entnommen sind.

Bei dem Auswahlverfahren hatten wir die u-Achse in Intervalle geteilt. Wir markierten zuerst die Punkte $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, dann wurde jedes Intervall sukzessive halbiert. Ist eine beliebig kleine Größe ε vorgegeben, so bestimmen wir ein $L(\varepsilon)$ so, daß (40.), (42.) gelten. Man halbiere dann die Intervalle so weit, daß jedes Intervall kleiner als ε wird.

Wir zeigen nun, daß

$$(45.)\qquad \int_{-L}^{+L}|\Phi(u)-\varphi_n(u)|\,du\leqq 3\varepsilon,\ n\geqq N(\varepsilon).$$

Wir zerlegen den Integrationsweg von $-L$ bis $+L$ in die einzelnen Intervalle:

$$(46.)\ \int_{-L}^{+L}|\Phi(u)-\varphi_n(u)|\,du=\sum_{i=1}^{m-1}\int_{u_i}^{u_{i+1}}|\Phi(u)-\varphi_n(u)|\,du,$$

wo u_i die Eckpunkte der Intervalle sind und $-L=u_1$, $L=u_m$, $u_{i+1}>u_i$, $|u_{i+1}-u_i|<\varepsilon$.

Wir bestimmen nun ein $N(\varepsilon)$ so, daß für jedes $n \geqq N$ alle $\varphi_n(u)$ aus Δ

1) in jedem von den $m-1$ Intervallen, *die erster Art sind, einen Sprung haben,* und

2) in jedem *solchen Intervalle zweiter Art* (wo $\operatorname{Lim} \varphi_n(u)$ existiert)

$$|\Phi(u) - \varphi_n(u)| \leqq \frac{\varepsilon}{2L} \quad \text{für} \quad n \geqq N \tag{47.}$$

ist. Wir zerlegen die Summe rechterhand in (46.) in zwei Teile, über die Intervalle erster Art und zweiter Art, d. h. wir schreiben

$$\sum_{i=1}^{m-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} |\Phi(u) - \varphi_n(u)|\, du = \sum_{\mathrm{I}} + \sum_{\mathrm{II}}, \tag{48.}$$

wo $\sum_{\mathrm{I}}$ den Teil der Integrale über die Intervalle erster Art, und $\sum_{\mathrm{II}}$ entsprechend über die Intervalle zweiter Art bedeutet.

Nun ist in $\sum_{\mathrm{II}}$ der Integrand nach (47.) kleiner als $\frac{\varepsilon}{2L}$ und der Weg $\leqq 2L$. Es ist also in (48.)

$$\left|\sum_{\mathrm{II}}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2L} \cdot 2L = \varepsilon.$$

Mit $\sum_{\mathrm{I}}$ verfahren wir folgendermaßen. Es sei das Intervall $u_k - u_{k+1}$ von erster Art. Es wird $\varphi_n(u)$, wo $n > N$ ist, in diesem Intervalle einen Sprung in einem Punkte c haben. (c ist von u_k verschieden, da nach unserer Festsetzung zu jedem Intervall nur sein rechter Eckpunkt gehört, und $u_k < u_{k+1}$ ist eben sein linker Eckpunkt.)

Nun wird nach Satz I des vorigen Paragraphen der Wert von allen späteren Belegungsfunktionen $\varphi_{n+m}(c)$ zwischen den Werten von $\varphi_n(c-0)$ und $\varphi_n(c)$ liegen, also auch diejenigen von $\Psi(u) = \operatorname{Lim\,sup}_{n=\infty} \varphi_n(u)$, $X(u) = \operatorname{Lim\,inf}_{n=\infty} \varphi_n(u)$ und $\Phi(u) = \frac{p\Psi + qX}{p+q}$ zwischen $\varphi_n(c-0)$ und $\varphi_n(c)$ liegen:

$$\varphi_n(c-0) \leqq \Phi(c) \leqq \varphi_n(c).$$

Daraus folgt

$$\Phi(u_{k+1}) \geqq \varphi_n(u_k + 0), \quad \varphi_n(u_{k+1}) \geqq \Phi(u_k + 0), \tag{49.}$$

da $u_k \neq c$ ist.

Wir schätzen nun den Integranden in $\sum_{\mathrm{I}}$ ab. Ist $\varphi_n(u) \leqq \Phi(u)$, wo u ein Punkt in diesem Intervalle ist, so wird

$$\Phi(u) - \varphi_n(u) \leqq \Phi(u_{k+1}) - \varphi_n(u_k + 0) \leqq \Phi(u_{k+1}) - \varphi_n(u_k + 0) + \varphi_n(u_{k+1}) - \Phi(u_k + 0)$$

nach (49.). Ist dagegen $\Phi(u) \leqq \varphi_n(u)$, so wird

$\varphi_n(u)-\Phi(u)\leqq\varphi_n(u_{k+1})-\Phi(u_k+0)\leqq\varphi_n(u_{k+1})-\Phi(u_k+0)+\Phi(u_{k+1})-\varphi_n(u_k+0)$
nach (49.).

Es folgt also

(50.) $$|\Phi(u)-\varphi_n(u)|\leqq\Phi(u_{k+1})-\Phi(u_k+0)+\varphi_n(u_{k+1})-\varphi_n(u_k+0).$$

Die rechte Seite ist die Zunahme von $\Phi(u)+\varphi_n(u)$ im Intervalle (u_k+0, u_{k+1}), wo u_k+0 darauf hindeutet, daß u_k zum Intervalle nicht mitzurechnen ist. Nennen wir die Zunahme von $\Phi(u)+\varphi_n(u)$ in diesem Intervalle Z_k, so ist

(51.) $$\int_{u_k}^{u_{k+1}}|\Phi(u)-\varphi_n(u)|\,du\leqq Z_k\cdot\varepsilon,\qquad (n\geqq N)$$

da $|u_{k+1}-u_k|\leqq\varepsilon$ ist. Es ist somit

(52.) $$|\sum_1|\leqq\Sigma Z_k\cdot\varepsilon\leqq 2\cdot\varepsilon,$$

da ΣZ_k kleiner oder gleich der Gesamtzunahme von $\Phi(u)+\varphi_n(u)$ ist und $0\leqq\Phi(u)\leqq 1$, $0\leqq\varphi_n(u)\leqq 1$ ist. Aus (48.) und (52.) folgt aber die Gleichung (45.)

$$\int_{-L}^{+L}|\Phi(u)-\varphi_n(u)|\,du\leqq 3\,\varepsilon.\qquad (n\geqq N(\varepsilon))$$

Es ist hiermit Satz II bewiesen.

§ 10. Divergenzmöglichkeit des Kettenbruches.

In diesem Paragraphen soll die Notwendigkeit der soeben vorgenommenen Auswahl dargetan werden. Es sollen nämlich solche Werte a_n, b_n^2 angegeben werden, für welche der Kettenbruch

(53.) $$K(\lambda)=\cfrac{1}{a_1+\lambda-\cfrac{b_1^2}{a_2+\lambda-\cfrac{b_2^2}{a_3+\lambda-\ddots}}}\qquad (a_i,\ b_i \text{ reell})$$

auch im *Komplexen divergiert.*

Es sei $a_n=0$. Setzen wir $\lambda=ix$, $i=\sqrt{-1}$, so wird

(54.) $$K(ix)=\cfrac{-i\cdot 1}{x+\cfrac{b_1^2}{x+\cfrac{b_2^2}{x+\ddots}}},$$

wenn man sukzessive jeden Teilzähler und Teilnenner mit $-i$ multipliziert. Der Kettenbruch (54.) wird nach dem bekannten Kriterium für Ketten-

brüche*) mit lauter positiven Elementen, *konvergieren* oder *nicht* für $x \geqq 0$, je nachdem

$$(55.) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{ } \textit{divergiert,} \text{ wo } \frac{1}{B_{n-1} B_n} = b_n^2, \; B_0 = 1,$$

oder *nicht*. Setzt man z. B. $b_n^2 = c^n$, so wird $K(ix)$ für $x \geqq 0$ konvergieren, wenn $c \leqq 1$ ist, und divergieren, wenn $c > 1$ ist.

Jedenfalls werden bei $a_n = 0$ sowohl die *geraden* wie die *ungeraden* Näherungsbrüche von (53.) für sich konvergieren. Es ist dies bekannt für $x \geqq 0$. Wir zeigen, daß diese Konvergenz für alle nicht rein imaginären x, also für alle nicht reellen λ stattfindet, und zwar *gleichmäßig* in einem endlichen Gebiete G der λ-Ebene, welches einen minimalen von Null verschiedenen Abstand von der reellen Achse hat.

Es gilt nämlich folgender Satz.

Satz III. *Konvergiert der Kettenbruch* (53.) *für unendlich viele* λ, *die mindestens eine endliche nicht reelle Häufungsstelle haben, so konvergiert* $K(\lambda)$ *für alle nicht reellen* λ, *und zwar gleichmäßig in einem endlichen Gebiete* G *der* λ*-Ebene, welches einen minimalen von Null verschiedenen Abstand von der reellen Achse hat.*

Zum Beweise dieses Satzes benutzen wir einen Satz von *Vitali***) (eine Erweiterung eines Satzes von *Stieltjes*).

Er besagt folgendes: Es seien die analytischen Funktionen

$$f_1(\lambda), \; f_2(\lambda), \; \ldots \; f_n(\lambda), \; \ldots$$

für alle λ in einem endlichen Gebiete G regulär und gleichmäßig beschränkt, d. h. es gebe eine absolute Konstante C derart, daß für alle λ in G

$$|f_n(\lambda)| \leqq C$$

ist. Es existiere ferner

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} f_n(\lambda)$$

für unendlich viele Punkte in G, die mindestens einen Häufungspunkt im Innern von G haben. Dann existiert für *alle* λ im Innern von G *gleichmäßig*

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} f_n(\lambda) = f(\lambda).$$

Um den Satz III zu beweisen, brauchen wir nur zu zeigen, daß die Folge der Näherungsbrüche $\frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)}$ gleichmäßig beschränkt ist für alle λ in einem

*) Vgl. etwa *Perron*, die Lehre von den Kettenbrüchen (Leipzig 1913) S. 237.

**) Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di scienze e lettre Ser. II, t. XXXVI (1903) p. 772—774.

Gebiete G, welches einen minimalen von Null verschiedenen Abstand von der reellen Achse hat. Nun ist in G, wenn man $\lambda = \mu + i\nu$ setzt,

$$|\nu| \geqq \nu_0 > 0.$$

Es wird also in G

$$\left|\frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)}\right| \leqq \sum_{i=1}^{n} \frac{|M_i^{(n)}|}{|\lambda - \lambda_i^{(n)}|} \leqq \frac{1}{\nu_0}, \tag{56.}$$

da $\sum_{i=1}^{n} M_i^{(n)} = 1$, $M_i^{(n)} > 0$, $|\lambda - \lambda_i^{(n)}| \geqq \nu_0$ in G, also gleichmäßig beschränkt.

Es ist somit Satz III bewiesen. Ist aber (55.) $\sum_{n=1}^{\infty} B_n$ konvergent, $\frac{1}{B_{n-1} B_n} = b_n^2$, $B_0 = 1$, so wird

$$\left|\operatorname{Lim}_{n=\infty} \frac{P_{2n}(\lambda)}{Q_{2n}(\lambda)}\right| < \left|\operatorname{Lim}_{n=\infty} \frac{P_{2n+1}(\lambda)}{Q_{2n+1}(\lambda)}\right| \tag{57.}$$

für rein imaginäres λ.

Es wird dagegen unser Kettenbruch im Komplexen konvergieren, wenn die Teilzähler b_n^2 eine obere Schranke haben: $b_n^2 \leqq B \geqq 1$. Es ist

$$\frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)} = \frac{1}{Q_0 Q_1} + \frac{b_1^2}{Q_1 Q_2} + \frac{b_1^2 b_2^2}{Q_2 Q_3} + \cdots + \frac{b_1^2 b_2^2 \cdots b_{n-1}^2}{Q_{n-1} Q_n}, \quad Q_0 = 1. \tag{58.}$$

Die Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{2i+1}$ von $Q_i Q_{i+1}$ sind sämtlich reell. Für $\lambda = \pm ix$, $x \geqq 2B$ wird

$$|Q_i Q_{i+1}| = |\lambda - \lambda_1|\,|\lambda - \lambda_2| \cdots |\lambda - \lambda_{2i+1}| \geqq 2^i B^i. \tag{59.}$$

Es wird also der absolute Betrag des allgemeinen Gliedes in $\frac{P_n}{Q_n}$,

$$\left|\frac{b_1^2 \cdots b_i^2}{Q_i Q_{i+1}}\right| \leqq \frac{B^i}{2^i B^i} = \frac{1}{2^i}, \tag{60.}$$

und somit konvergiert die Folge $\frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)}$ zunächst für $\lambda = \pm ix$, $x \geqq 2B$.

Aus Satz III folgt aber, daß $\operatorname{Lim}_{n=\infty} \frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)}$ für alle *nicht reellen* λ existiert, und zwar gleichmäßig in einem endlichen Gebiete G, welches einen minimalen von Null verschiedenen Abstand von der reellen Achse hat.

Kapitel IV. **Funktionentheoretische Anwendungen.**

§ 11. Die erzeugende Potenzreihe besitzt einen Konvergenzkreis.

Wir gehen jetzt, wie im 2. Kapitel, wieder von einer Potenzreihe $f(z)$ ohne konstantes Glied aus. Es sei

(61.) $$f(z) = t_0 z + t_1 z^2 + \cdots, \quad t_0 = 1, \quad t_i \text{ reell.}$$

Wir machen die Voraussetzungen, erstens, daß $f(z)$ *in einem Kreise mit dem Radius* R *konvergiert*, und zweitens, daß die Determinanten

$$A_n = \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-1} \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n-2} & t_{n-1} & t_n & \cdots & t_{2n-3} \\ t_{n-1} & t_n & t_{n+1} & \cdots & t_{2n-2} \end{vmatrix} \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

sämtlich positiv und von Null verschieden sind.

Alsdann wird $f(z)$ einen unendlichen Kettenbruch $K\left(\frac{1}{z}\right)$ mit reellen Koeffizienten und negativen Teilzählern erzeugen:

(62.) $$K(\lambda) = \cfrac{1}{a_1 + \lambda - \cfrac{b_1^2}{a_2 + \lambda - \cdots}} \qquad \left(\lambda = \frac{1}{z}\right),$$

wie es im ersten Kapitel dargetan wurde. Es folgt weiter aus dem Konvergenz-Satz I des zweiten Kapitels, daß $K\left(\frac{1}{z}\right)$ in dem Konvergenzkreis von $f(z)$ ebenfalls konvergieren wird und gleich $f(z)$ ist, und ferner aus Satz III des vorigen Kapitels, daß $K(\lambda)$ für alle nicht reellen λ konvergiert. Andererseits hatten wir eine Integraldarstellung für den Grenzwert einer Auswahl von Näherungsbrüchen des $K(\lambda)$ gewonnen. Diese Auswahl ist jetzt entbehrlich, weil ja $K(\lambda)$ im Komplexen konvergiert. Es ist also

$$f(z) = K(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi(u)}{\lambda - u}.$$

Nun hatten wir im zweiten Kapitel gezeigt, daß, wenn $f(z)$ konvergiert, die Nullstellen $\lambda_i^{(n)}$ der Näherungsnenner $Q_n(\lambda)$, absolut genommen, eine obere Schranke haben, und zwar ist nach (19.) $|\lambda_i^{(n)}| \leqq \frac{1}{R}$. Die Belegungspunkte u der Belegungsfunktionen $\varphi_n(u)$ befinden sich demnach alle im Intervalle $\left(-\frac{1}{R}, +\frac{1}{R}\right)$. Es wird somit auch $\Phi(u)$ nur in diesem Intervalle wachsen können. Es wird

(63.) $$f(z) = K(\lambda) = \int_{-1/R}^{+1/R} \frac{d\Phi(u)}{\lambda - u} = \int_{-S}^{+S} \frac{d\Phi(u)}{\lambda - u},$$

wo $S = 1/R$ gesetzt wird. Diese Integraldarstellung (63.) gilt für alle nicht reellen λ.

Aus der Integraldarstellung (63.) folgt sofort, *daß $f(z)$ für alle nicht reellen z endlich bleibt und von Null verschieden ist.* Denn setzen wir $\lambda = \mu + i\nu$, $\nu \neq 0$, so wird der imaginäre Teil von $f(z)$

$$\Im(f(z)) = -\nu \int_{-S}^{S} \frac{d\Phi(u)}{(u-x)^2+\nu^2} \neq 0,$$

wenn $\nu \neq 0$, da $d\Phi(u) \geqq 0$, und nicht identisch Null ist.

§ 12. Die erzeugende Potenzreihe ist Element einer meromorphen Funktion*).

Wir machen jetzt noch die Voraussetzung, daß die erzeugende Potenzreihe $f(z)$ Element einer meromorphen Funktion ist. Die Fortsetzung von $f(z)$ ist also in der ganzen z-Ebene bis auf Pole regulär.

Diese Pole sind nun alle reell, wie es am Ende des vorigen Paragraphen hervorgehoben wurde.

Wir werden jetzt zeigen, daß unsere Integraldarstellung (63.) noch wesentlich mehr über den Charakter der Funktion $f(z)$ zu folgern gestattet.

Wir zeigen, daß in diesem Falle unser Integral gleich einer unendlichen Summe über diskrete Punkte u_i wird, wo $\frac{1}{u_i}$ die Pole von $f(z)$ sind. Die Punkte u_i haben als einzige Häufungsstelle den Punkt Null. Diese unendliche Summe ist die *Mittag-Lefflersche* Entwicklung von $f(z)$. Wir zeigen hiermit, daß die *Mittag-Lefflersche* Partialbruchdarstellung der Funktion $\frac{f(z)}{z}$ von konvergenzerzeugenden Summanden frei ist.

Wir zeigen zunächst, daß $\Phi(u)$ im Innern eines Intervalles (u_i, u_k), wo u_i, u_k zwei benachbarte Pole von $f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ sind, *keinen Sprung* haben kann. Denn gäbe es einen Punkt $\bar{u}$, $u_i < \bar{u} < u_k$, so daß $d\Phi(\bar{u})$ eine endliche positive Größe ist, so ist leicht zu sehen, daß der imaginäre Teil unseres Integrales für $\lambda = \bar{u} + i\varepsilon$ unendlich groß wird für $\operatorname{Lim} \varepsilon = 0$, gegen unsere Voraussetzung, daß $f\left(\frac{1}{\bar{u}}\right)$ regulär ist. Es ist

$$\Im\left(f\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)_{\lambda=\bar{u}+i\varepsilon} = \int_{-S}^{+S} \frac{-\varepsilon\, d\Phi(u)}{(u-\bar{u})^2+\varepsilon^2}.$$

---

*) Man kann beweisen, daß die erzeugende Potenzreihe von $K(\lambda)$ keine ganze transzendente Funktion von z darstellen kann. Aus der Beschränktheit von $K(\lambda)$ im Komplexen folgt sogar, daß, wenn eine ganze Funktion $g(z)$ sich als eine Summe von endlich vielen $K(\lambda)$ mit konstanten Koeffizienten darstellen läßt, also

$$g(z) = c_1 K_1(\lambda) + \cdots + c_n K_n(\lambda),$$

sie eine lineare Funktion von z ist.

Dieses Integral enthält ein Element $\frac{-d\Phi(\bar{u})}{\varepsilon}$, welches unendlich groß würde für Lim $\varepsilon = 0$; alle anderen Elemente des Integrales sind von demselben Vorzeichen und können es nicht aufheben. *Es hat also $\Phi(u)$ keinen Sprung in $\bar{u}$.*

Wir zeigen jetzt die *Unmöglichkeit*, daß $\Phi(u)$ im Innern eines Intervalles (u_i, u_k), wo $\lambda = u_i, u_k$ zwei benachbarte Pole von $f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ sind, *stetig wächst*; es muß also $\Phi(u)$ im Innern eines Intervalles (u_i, u_k) *konstant* sein. Man kann diese Behauptung noch verallgemeinern. Die Funktion $f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ sei im Intervalle (u_i, u_k) nicht regulär. Das betreffende Intervall sei für $f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ eine Verzweigungslinie. Geht λ durch das betreffende Intervall hindurch, so erleide $f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ einen Sprung $S(\lambda)$, wo $S(\lambda)$ eine stetige Funktion von λ ist, Es soll, wenn man $\lambda = x + i\varepsilon$ setzt,

$$\operatorname*{Lim}_{\varepsilon=0}\left[f\left(\frac{1}{x-i\varepsilon}\right)-f\left(\frac{1}{x+i\varepsilon}\right)\right]=S(x)$$

gleichmäßig für alle x des Intervalles sein. Wir behaupten, daß $\Phi(u)$ in dem betreffenden Intervalle differenzierbar ist und $\frac{d\Phi(u)}{du}=\frac{S(u)}{2i\pi}$.

Ist speziell $f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ im Intervalle regulär, so ist $S(u) \equiv 0$ und $\frac{d\Phi(u)}{du} \equiv 0$, also $\Phi(u)$ im Innern des Intervalles konstant.

Beweis. Es ist

$$f\left(\frac{1}{x+i\varepsilon}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\Phi(u)}{x+i\varepsilon-u}=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(u)\,du}{(x+i\varepsilon-u)^2}=\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(u)\,du}{x+i\varepsilon-u},\quad \varepsilon>0.$$

Es wird

$$f\left(\frac{1}{x-i\varepsilon}\right)-f\left(\frac{1}{x+i\varepsilon}\right)=\frac{d}{dx}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(u)\,du}{x-i\varepsilon-u}-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(u)\,du}{x+i\varepsilon-u}\right]=\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2i\varepsilon\,\Phi(u)\,du}{(x-u)^2+\varepsilon^2}.$$

Wir zerlegen den Integrationsweg von $-\infty$ bis $+\infty$ in vier Teile. Wir schreiben

$$\int_{-\infty}^{+\infty}=\int_{-\infty}^{x-\sqrt{\varepsilon}}+\int_{x-\sqrt{\varepsilon}}^{x}+\int_{x}^{x+\sqrt{\varepsilon}}+\int_{x+\sqrt{\varepsilon}}^{+\infty}.$$

Das erste und vierte Integral streben nach Null für Lim $\varepsilon=0$. Es ist nämlich, da $0 \leqq \Phi \leqq 1$,

$$\left|\int_{-\infty}^{x-\sqrt{\varepsilon}} \frac{2i\varepsilon\Phi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}\right| \leqq \int_{-\infty}^{x-\sqrt{\varepsilon}} \frac{2\varepsilon\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = \left[2 \operatorname{arc\,tg} \frac{u-x}{\varepsilon}\right]_{u=-\infty}^{u=x-\sqrt{\varepsilon}}$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Es wird somit

$$\int_{-\infty}^{x-\sqrt{\varepsilon}} \frac{2i\varepsilon\Phi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = \vartheta_1 \cdot 2i\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad 0 \leqq \vartheta_1 \leqq 1.$$

Ebenso wird

$$\int_{x+\sqrt{\varepsilon}}^{+\infty} \frac{2i\varepsilon\Phi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = \vartheta_2 \cdot 2i\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad 0 \leqq \vartheta_2 \leqq 1.$$

Das zweite Integral ist

$$\int_{x-\sqrt{\varepsilon}}^{x} \frac{2i\varepsilon\Phi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = 2i \cdot \Phi(x - \vartheta' \sqrt{\varepsilon}) \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad 0 \leqq \vartheta' \leqq 1,$$

da nach unserer Annahme $\Phi(u)$ in diesem Intervalle stetig ist. Ebenso wird

$$\int_{x}^{x+\sqrt{\varepsilon}} \frac{2i\varepsilon\Phi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = 2i \cdot \Phi(x + \vartheta'' \sqrt{\varepsilon}) \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad 0 \leqq \vartheta'' \leqq 1.$$

Es wird somit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2i\varepsilon\Phi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = 2i\pi \cdot \Phi(x) + i \cdot \eta(x, \varepsilon), \tag{64.}$$

wo $|\eta(x, \varepsilon)|$ mit ε gegen Null konvergiert, gleichmäßig für alle x im Intervalle (u_i, u_k).

Nun ist uns gegeben

$$\operatorname*{Lim}_{\varepsilon=0}\left(f\left(\frac{1}{x-i\varepsilon}\right) - f\left(\frac{1}{x+i\varepsilon}\right)\right) = \operatorname*{Lim}_{\varepsilon=0} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2i\varepsilon\Phi(u)\,du}{(x-u)^2+\varepsilon^2} = S(x)$$

gleichmäßig für alle x im betreffenden Intervalle. Ist ein beliebig kleines $\delta > 0$ vorgegeben und sind $x_1 < x_2$ irgend zwei Punkte im Intervalle (u_i, u_k), so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2i\varepsilon\Phi(u)\,du}{(x_2-u)^2+\varepsilon^2} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2i\varepsilon\Phi(u)\,du}{(x_1-u)^2+\varepsilon^2} = \int_{x_1}^{x_2} S(x)\,dx + i\vartheta\delta(x_2 - x_1),$$

wo $-1 \leqq \vartheta \leqq 1$ für genügend kleines ε. Nach (64.) folgt

$$2i\pi(\Phi(x_2) - \Phi(x_1)) + \eta(x_2, \varepsilon) - \eta(x_1, \varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} S(x)\,dx + i\vartheta\delta(x_2 - x_1).$$

Es ist somit

$$\left|2i\pi(\Phi(x_2) - \Phi(x_1)) - \int_{x_1}^{x_2} S(x)\,dx\right| \leqq |\vartheta|\delta(x_2 - x_1) + 2|\eta(x, \varepsilon)|,$$

also beliebig klein für kleine ε. Es muß demnach sein

$$2i\pi(\Phi(x_2)-\Phi(x_1))=\int_{x_1}^{x_2}S(x)dx,$$

also

$$\frac{d\Phi(u)}{du}=\frac{S(u)}{2i\pi},\quad \text{w. z. b. w.} \tag{65.}$$

Dies gilt, wenn $f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ im Intervalle (u_i, u_k) verzweigt ist.

Nach Voraussetzung ist aber $f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ regulär im Intervalle (u_i, u_k). *$S(u)$ ist also identisch Null.*

Es ist somit $d\Phi(u)=0$ im Innern des Intervalles, und $\Phi(u)$ ist im Innern eines Intervalles (u_i, u_k) *konstant.*

Unser $\int_{-s}^{+s}\frac{d\Phi(u)}{\lambda-u}$ wird eine unendliche Summe über die Punkte u_i, wo $z=\frac{1}{u_i}$ ein Pol von $f(z)$ ist, und ev. über den Punkt $u=0$. Es wird

$$f(z)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d\Phi(u_i)}{\lambda-u_i}\text{*}). \tag{66.}$$

Die u_i haben als einzige Häufungsstelle den Punkt Null, da die $\frac{1}{u_i}$ als Pole von $f(z)$ die einzige Häufungsstelle ∞ haben.

Dividieren wir (66.) durch $-z$, so bekommen wir

$$\frac{-f(z)}{z}=\Sigma\frac{d\Phi(u_i)}{u_iz-1}=-d\Phi(0)+\frac{\Sigma' d\Phi\left(\frac{1}{z_i}\right)\cdot z_i}{z-z_i}=-c+\Sigma\frac{R_i}{z-z_i}, \tag{67.}$$

wo $c=d\Phi(0)$, $R_i=d\Phi\left(\frac{1}{z_i}\right)\cdot z_i$, $z_i=\frac{1}{u_i}$ und der eventuell auftretende Punkt $u=0$ aus der Summe abgesondert ist.

In (67.) haben wir für $\frac{-f(z)}{z}$ eine *Mittag-Lefflersche* Partialbruchdarstellung ohne konvergenzerzeugenden Summanden gewonnen. Sie konvergiert *absolut* und *gleichmäßig* in jedem endlichen Bereich der z-Ebene, der einen endlichen Abstand von den z_i hat; denn es ist $\Sigma\left|d\Phi\left(\frac{1}{z_i}\right)\right|=1$, und der Faktor $\frac{z_i}{z-z_i}$ hat in einem solchen Bereich absolut genommen eine obere Schranke.

---

*) Es ist die Ableitung von $f(z)$ nach λ gleich $-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d\Phi(u_i)}{(\lambda-u_i)^2}$ *negativ* für alle reelle λ, und die Ableitung nach z ist positiv für alle reelle z. Die $\Sigma\frac{d\Phi(u_i)}{(\lambda-u_i)^2}$ konvergiert ebenfalls gleichmäßig wie (66.)

§ 13. Beispiel für eine eigentliche Integraldarstellung.

Als Beispiel, in welchem man $\Phi(u)$ explizite aufstellen kann und wo das Integral sich aber nicht auf eine Summe von abzählbar vielen Summanden reduziert, wird uns der periodische Kettenbruch dienen. Es sei

$$y(\lambda) = \cfrac{-b_n^2}{a_1 + \lambda - \cfrac{b_1^2}{a_2 + \lambda - \cfrac{b_2^2}{a_3 + \lambda - \cdots - \cfrac{b_{n-1}^2}{a_n + \lambda - \cfrac{b_n^2}{a_1 + \lambda - b_1^2 \cdots}}}}}$$

Es wird

$$y(\lambda) = \frac{(a_n + \lambda + y) P_{n-1} - b_{n-1}^2 P_{n-2}}{(a_n + \lambda + y) Q_{n-1} - b_{n-1}^2 Q_{n-2}} = \frac{P_n + y P_{n-1}}{Q_n + y Q_{n-1}}.$$

Daraus folgt für y eine quadratische Gleichung

$$y^2 Q_{n-1} + y(Q_n - P_{n-1}) - P_n = 0,$$

$$y = \frac{P_{n-1} - Q_n \pm \sqrt{(Q_n - P_{n-1})^2 + 4 P_n Q_{n-1}}}{2 Q_{n-1}} = \frac{P_{n-1} - Q_n \pm \sqrt{(Q_n + P_{n-1})^2 - 4 b_1^2 b_2^2 \cdots b_n^2}}{2 Q_{n-1}}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß die eine Wurzel dieser Gleichung sich in eine Potenzreihe nach ganzzahligen Potenzen von z entwickeln läßt. Als konvergente Potenzreihe wird sie einen Kettenbruch erzeugen, der ebenfalls in diesem Kreise konvergiert und gleich der Potenzreihe ist. Der Kettenbruch wird für alle nicht reellen λ konvergieren, wie aus der Integraldarstellung (63.) folgt. Die Pole unserer Funktion $y(\lambda)$ sind sämtlich reell und einfach, als Nullstellen von $Q_{n-1}(\lambda)$. Die Verzweigungslinien unserer Funktion $y(\lambda)$ werden, da aus der Integraldarstellung (63.) für $y(\lambda)$ folgt, daß dieser Zweig der zweideutigen Funktion für alle nicht reellen λ regulär ist, aus Stücken der reellen Achse bestehen. Bezeichnen wir die Diskriminante der quadratischen Gleichung für y mit $D = (Q_n + P_{n-1})^2 - 4 b_1^2 \cdots b_n^2$, so muß D lauter reelle Nullstellen haben. Beim Überschreiten der Verzweigungslinie in einem Punkt u wird $y(\lambda)$ einen Sprung $S(u) = \frac{\sqrt{D(u)}}{Q_{n-1}(u)}$ erleiden. Nun haben wir bewiesen, daß $\frac{d\Phi(u)}{du} = \frac{S(u)}{2i\pi}$ für die Intervalle, in denen $\Phi(u)$ stetig ist. $\Phi(u)$ kann aber nur Sprünge haben, wo $y(\lambda)$ einen Pol hat, d. h., wenn der Nenner $Q_{n-1}(\lambda) = 0$ ist. Es muß $S(u)$ längs der Verzweigungslinien rein imaginär sein. Nun ist $S(u) = \frac{\sqrt{D}}{Q_{n-1}(u)}$; es muß also $D < 0$ sein. Auf

diesen Verzweigungslinien muß $\Phi(u)$ stetig sein, da $\Phi(u)$ nur an den Nullstellen von Q_{n-1} Sprünge haben kann. Wenn aber $Q_{n-1}=0$ ist, so ist $D=(Q_n-P_{n-1})^2+4P_nQ_{n-1}=(Q_n-P_{n-1})^2\geqq 0$. Es wird

$$\frac{d\Phi(u)}{du}=\frac{+\sqrt{-D(u)}}{2\pi|Q_{n-1}(u)|}.$$

Sondert man in der Integraldarstellung (63.) die Unstetigkeitsstellen von $\Phi(u)$ aus dem Integrale ab, so bekommt man

$$y(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{(\sqrt{\ }\text{reell})}\frac{\sqrt{4b_1^2\cdots b_n^2-(Q_n+P_{n-1})^2}}{|Q_{n-1}(u)|(\lambda-u)}\,du+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{d\Phi(\lambda_i)}{\lambda-\lambda_i},$$

oder ausführlicher

$$\frac{P_{n-1}(\lambda)-Q_n(\lambda)+\sqrt{(Q_n+P_{n-1})^2-4b_1^2\cdots b_n^2}}{2Q_{n-1}(\lambda)}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{(D<0)}\frac{+\sqrt{4b_1^2\cdots b_n^2-(Q_n(u)+P_{n-1}(u))^2}}{(\lambda-u)|Q_{n-1}(u)|}\,du+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{d\Phi(\lambda_i)}{\lambda-\lambda_i},$$

wo das Integral über die Intervalle, wo $D<0$, erstreckt wird. Sie liegen im Endlichen, da im Unendlichen $D=(Q_n+P_{n-1})^2-4b_1^2\cdots b_n^2>0$ ist. Die endliche Summe erstreckt sich über die Nullstellen λ_i von $Q_{n-1}(\lambda)$.

§ 14. Realität der Pole und Nullstellen und die Form der *Mittag-Lefflers*chen Entwicklung meromorpher Funktionen.

Es sei $r(z)$ eine reelle meromorphe Funktion von z, die also in der ganzen z-Ebene bis auf Pole regulär ist. Im Punkte $z=0$ sei $r(z)$ regulär. Wir schreiben die Entwicklung von $r(z)$ nach Potenzen von z:

(68.) $$-r(z)=r_0+r_1z+r_2z^2+\cdots,$$

r_i reell. *Wir machen die Voraussetzung, daß die Determinanten*

(69.) $$A_n=\begin{vmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{n-1}\\ r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ r_{n-2} & r_{n-1} & r_n & \cdots & r_{2n-3}\\ r_{n-1} & r_n & r_{n+1} & \cdots & r_{2n-2}\end{vmatrix} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

*sämtlich positiv und von Null verschieden sind**), oder was dasselbe ist,

*) Diese Voraussetzung ist nach Kapitel I gleichbedeutend damit, daß $-r(z)\cdot z$ sich in einen Kettenbruch mit reellen Koeffizienten und negativen Teilzählern entwickeln läßt.

daß die quadratische *Form* $\sum_{i,k=0}^{n} r_{i+k} x_i x_k$ *für jedes n eigentlich positiv definit ist.* Es folgt nach dem Ende des elften Paragraphen, *daß* $r(z)$ *lauter reelle Pole und Nullstellen hat**). Es wird überdies nach (67.) des § 12 $r(z)$ *eine Mittag-Lefflersche Entwicklung ohne konvergenzerzeugenden Summanden besitzen, d. h. also eine Entwicklung von folgender Form*:

$$(70.) \qquad r(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_i}{z - z_i} - c,$$

wo z_i reell, $R_i/z_i > 0$, $c \geqq 0$ ist.

Es konvergiert (70.) *absolut* und *gleichmäßig* in jedem endlichen Bereich, der einen endlichen Abstand von den Punkten z_i hat. Denn es ist $\sum_{i=1}^{\infty} |R_i/z_i| = \sum_{i=1}^{\infty} R_i/z_i = -c - r(0)$ endlich nach Voraussetzung, und der Faktor $\frac{z_i}{z - z_i}$ hat in einem solchen Bereich absolut genommen eine obere Schranke. Es folgt auch aus (70.), daß $r(z)$ nur *einfache Pole hat***). — Wir machen nun anstatt (69.) die Voraussetzung, daß die quadratische Form $\sum_{i,k=0}^{n} r_{i+k} x_i x_k$ *positiv semi-definit ist* von einem gewissen n an, oder, was dasselbe ist, daß

$$(71.) \qquad A_1 > 0, \ \ldots, \ A_n > 0, \ A_{n+1} = 0, \ A_{n+2} = 0, \ \ldots .$$

Aus (71.) folgt, daß die Koeffizienten r_i von $r(z)$ einer Rekursionsformel aus $n+1$ Gliedern mit konstanten Koeffizienten genügen. Dies bedeutet, daß $r(z)$ eine rationale Funktion von z mit einem Nenner vom n-ten Grade ist.

Es folgt dann aus (71.) nach unserem ersten Kapitel, daß

$$r_0 z + r_1 z^2 + r_2 z^3 + \cdots = -r(z) \cdot z = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{\lambda - \lambda_i}$$

ist, wo $\lambda = \frac{1}{z}$, $M_i > 0$. Es wird

$$(72.) \qquad r(z) = \sum_{i=1}^{m} \frac{R_i}{z - z_i} - c,$$

---

*) Es folgt übrigens auch, daß $r(z)$ für nicht reelles z keinen positiven Wert p annehmen kann. Da $r(z) - p$ ebenfalls (69.) erfüllt, weil $\sum_{i,k=0}^{n} r_{i+k} x_i x_k + p \cdot x_0^2$ um so mehr eigentlich positiv definit ist, so kann auch $r(z) - p$ nur reelle Nullstellen haben.

**) Aus der Kettenbruchentwicklung von $-r(z) \cdot z$ ist leicht zu schließen, daß $r(z)$ nur *einfache Nullstellen hat.* Man kann es auch schließen aus der Fußnote am Ende des § 12.

wo $z_i = \frac{1}{\lambda_i}$, $R_i = M_i z_i$, $c = M_k$ von dem eventuell auftretenden Punkt $\lambda_k = 0$, und $m = n$ oder $n-1$, je nachdem $c = 0$ bzw. $c > 0$ ist.

Es folgt übrigens auch, daß $r(z)$ im *Konvergenzkreise* keine reellen Nullstellen haben kann. Denn es werden alle Glieder in der Summe (70.) negativ, wenn z im Konvergenzkreise liegt und reell ist, weil für solche z das Vorzeichen von $z - z_i$ dasselbe ist wie von $-z_i$, und R_i das Vorzeichen von z_i hat. Es wird also $\frac{R_i}{z - z_i} < 0$ sein, und somit kann $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_i}{z - z_i} - c$ nicht verschwinden, da auch $-c \leqq 0$ ist.

Wir bekommen folgenden Satz*):

Satz I. *Eine reelle meromorphe Funktion $r(z)$, die im Nullpunkt regulär ist, hat lauter reelle einfache Pole und Nullstellen, wenn die aus den Koeffizienten von $-r(z)$ gebildete quadratische Form $\sum_{i,k=0}^{n} r_{i+k} x_i x_k$ positiv definit ist für jedes n. Alsdann hat $r(z)$ eine Mittag-Lefflersche Entwicklung ohne konvergenzerzeugenden Summanden, zu welcher nur eine negative Konstante hinzugefügt werden kann. Ihre Residuen sind positiv für positive Pole und negativ für negative Pole. Es wird $r(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_i}{z - z_i} - c$, wo z_i reell, $R_i/z_i \geqq 0$, $c \geqq 0$ sind. Insbesondere ist $r(z)$ eine rationale Funktion von z dann und nur dann, wenn die positiv definiten quadratischen Formen $\sum_{i,k=0}^{n} r_{i+k} x_i x_k$ bloß semi-definit positiv sind von einem gewissen n an.*

Unser Satz I läßt sich auch umkehren. Ist eine meromorphe Funktion $r(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_i}{z - z_i}$ gegeben, wo z_i reell, $R_i/z_i \geqq 0$ und $r(0)$ regulär ist, $-r(z) = r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots$, so ist $\sum_{i,k=0}^{n} r_{i+k} x_i x_k$ für jedes n eine positive definite quadratische Form. (Wenn man zu $r(z) - c$ hinzufügt, wo $c \geqq 0$, so wird r_0 um $+c$ vergrößert, und $\Sigma r_{i+k} x_i x_k$ wird um so mehr positiv definit sein.)

*) Es läßt sich ebenso zeigen, daß, wenn $r(z)$ *nicht* meromorph ist, sondern *isolirte* wesentlich singuläre Stellen im Endlichen hat, $r(z) = \sum_{(i)} \frac{R_i}{z - z_i} - c$ ist, wo z_i reell, $R_i/z_i > 0$, $c \geqq 0$. Die Häufungsstellen der z_i sind die wesentlich singulären Stellen von $r(z)$. Die Konvergenz ist absolut und gleichmäßig, ähnlich wie (70.).

Beweis. Es ist $r_\nu = + \Sigma \frac{R_i}{z_i^{\nu+1}}$. Bezeichnen wir mit z_p, z_n die positiven bzw. die negativen Pole von $r(z)$, so wird $R_p \geqq 0$, $R_n \leqq 0$ sein. Unsere quadratische Form

$$\sum_{i,k=0}^{n} r_{i+k} x_i x_k = \sum_{(p)} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{z_p}} x_0 + \frac{1}{\sqrt{z_p^3}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{z_p^5}} x_2 + \cdots + \frac{1}{\sqrt{z_p^{2n+1}}} x_n \right)^2 R_p \right]$$
$$+ \sum_{(n)} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{-z_n}} x_0 + \frac{1}{\sqrt{-z_n^3}} x_1 + \cdots + \frac{1}{\sqrt{-z_n^{2n-1}}} x_n \right)^2 (-R_n) \right]$$

ist als Summe von Quadraten mit positiven Koeffizienten nicht negativ w. z. b. w. Ist von einer gewissen Stelle n an, die $\sum_{i,k=0}^{n} r_{i+k} x_i x_k$ nur semi-definit positiv, so ist, wie wir schon bewiesen haben, $r(z)$ eine rationale Funktion von z.

Wir fassen das Resultat im folgenden Satze zusammen.

Satz II. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine meromorphe Funktion $r(z)$ sich durch $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_i}{z - z_i} - c$ darstellen läßt, wo z_i reell, $R_i/z_i \geqq 0$, $c \geqq 0$, ist die, daß die quadratische Form $\sum_{i,k=0}^{n} r_{i+k} x_i x_k$ positiv definit ist für jedes n; dabei ist $r(z)$ im Nullpunkte als regulär vorausgesetzt und $-r(z) = r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots$. Es wird speziell $r(z)$ eine rationale Funktion von z sein, wenn $\sum_{i,k=0}^{n} r_{i+k} x_i x_k$ von einem gewissen n an nur semi-definit positiv ist.*

Wir wollen jetzt von unserer meromorphen Funktion $r(z)$ voraussetzen, daß

$$\Sigma r_{i+k+m} x_i x_k$$

positiv-definit ist für jedes n bei einem festen m. Es folgt dann nach unserm Satz I, daß die Potenzreihe

$$-r_m - r_{m+1} z - r_{m+2} z^2 - \cdots = \Sigma \frac{R_i}{z - z_i} - c$$

ist, wo z_i reell, $c \geqq 0$, $R_i/z_i \geqq 0$ ist. Multiplizieren wir es mit z^m, so wird

$$(73.) \quad -r_m z^m - r_{m+1} z^{m+1} - \cdots = \Sigma \frac{R_i z^m}{z - z_i} - c z^m = \Sigma \frac{R_i (z^m - z_i^m) + R_i z_i^m}{z - z_i} - c z^m$$
$$= -c z^m + \Sigma \left\{ \frac{R_i z_i^m}{z - z_i} + R_i \left(z_i^{(m-1)} + z z_i^{(m-2)} + \cdots + z^{m-1} \right) \right\}.$$

Diese Summe ist eine *Mittag-Lefflers*che Entwicklung, wobei der konvergenzerzeugende Summand ein Polynom $(m-1)$-ten Grades ist. Es ist

also $r(z)$ selbst eine solche *Mittag-Leffler*sche Entwicklung, da man zu (73.) nur das Polynom $(m-1)$-ten Grades $-r_0 - r_1 z - \cdots - r_{m-1} z^{m-1}$ hinzuzufügen hat, welches man in die Summe hineinziehen kann. Zu dieser Entwicklung kann nur $-cz^m$ hinzukommen. Es wird

$$r(z) = -cz^m + \Sigma\left\{\frac{R_i z_i^m}{z - z_i} + P_{m-1}\left(\frac{z}{z_i}\right)\right\},$$

wo $P_{m-1}\left(\frac{z}{z_i}\right)$ ein Polynom $(m-1)$-ten Grades in $\frac{z}{z_i}$ ist.

$r(z)$ hat lauter reelle einfache Pole. Seine Residuen $R_i z_i^m$ sind, bei geradem m, von demselben Vorzeichen wie die Pole, und bei ungeradem m, positiv, da $R_i/z_i > 0$ ist. Ist die quadratische Form $\sum_{i,k=0}^{n} r_{i+k+m} x_i x_k$ positiv definit, sowohl für irgendein gerades m als für ein ungerades m (für jedes n), so folgt, daß $r(z)$ lauter einfache *positive* Pole hat, da die Residuen von $r(z)$ für negative Pole nicht positiv sein können kraft der ersten Voraussetzung, und nicht negativ sein können kraft der zweiten Voraussetzung. Ist umgekehrt:

$$r(z) = \sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{R_i z_i^m}{z - z_i} + P_{m-1}\left(\frac{z}{z_i}\right)\right\},$$

so wird $\sum_{i,k=0}^{n} r_{i+k+m} x_i x_k$ positiv definit sein für jedes n. (Wenn $r(z)$ noch ein Glied $-cz^m$ enthält, so wird cx_0^2 zu $\sum_{i,k=0}^{n} r_{i+k+m} x_i x_k$ hinzukommen, wo $c \geqq 0$ ist, und die Form erst recht positiv definit sein).

Es ist nämlich leicht zu sehen, daß

$$-r_m z^m - r_{m+1} z^{m+1} - \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_i z_i^m \left(\frac{z}{z_i}\right)^m}{z - z_i},$$

da die Koeffizienten $r_m, r_{m+1}, \ldots$ von P_{m-1} nicht beeinflußt werden. Es wird $-r_m - r_{m+1} z - r_{m+2} z^2 - \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_i}{z - z_i}$, und nach unserm Satz II wird die quadratische Form $\sum_{i,k=0}^{n} r_{i+k+m} x_i x_k$ positiv definit sein für jedes n. Wir fassen unser Resultat im folgenden Satze zusammen:

Satz III. *Es sei $r(z)$ eine reelle meromorphe Funktion von z, die im Nullpunkt regulär ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $r(z)$ lauter reelle einfache Pole hat und sich zugleich durch die folgende Mittag-Lefflersche Entwicklung darstellen läßt:*

$$r(z) = \sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{R_i z_i^m}{z - z_i} + P_{m-1}\left(\frac{z}{z_i}\right)\right\} - cz^m,$$

(wo z_i reell, $R_i/z_i \geqq 0$ und $P_{m-1}\left(\frac{z}{z_i}\right)$ ein Polynom $(m-1)$-ten Grades in $\frac{z}{z_i}$ ist, $P_{-1} \equiv 0$), besteht darin, daß die quadratische Form $\sum_{i,k=0}^{n} r_{i+k+m} x_i x_k$ positiv definit ist für jedes n, wo die r_i aus

$$-r(z) = r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots$$

entnommen sind.

§ 15. Realität der Nullstellen und Geschlecht ganzer transzendenter Funktionen.

Wir wollen unsere meromorphe Funktion $r(z)$ spezialisieren. Es sei $g(z)$ eine reelle ganze transzendente oder rationale Funktion von z, die im Nullpunkt nicht verschwindet:

(74.) $$g(z) = g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \cdots, \qquad g_i \text{ reell}, \; g_0 \neq 0.$$

Wir setzen für $r(z)$ die logarithmische Ableitung von $g(z)$

$$r(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Es wird

$$\frac{-g'(z)}{g(z)} = -r(z) = s_{-1} + s_{-2} z + s_{-3} z^2 + \cdots,$$

wo die s_{-i} durch die *Newton*schen Rekursionsformeln bestimmt sind:

(75.) $$g_0 s_{-m} + g_1 s_{-(m-1)} + \cdots + g_{m-1} s_{-1} + m g_m = 0. \qquad (m=1, 2, \ldots)$$

Im Falle, daß $g(z)$ eine ganze *rationale* Funktion ist, wird s_{-i} die negative i-te Potenzsumme der Wurzeln von $g(z) = 0$ sein. Wir wollen unseren Satz II des vorigen Paragraphen auf unsere logarithmische Ableitung $r(z)$ anwenden.

Damit die Darstellung

(76.) $$r(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_i}{z - z_i} - c$$

möglich ist, wo z_i reell, $R_i/z_i \geqq 0$, $c \geqq 0$ sind, ist notwendig und hinreichend, daß die Formen $\sum_{i,k=0}^{n} s_{-(i+k+1)} x_i x_k$ positiv definit sind. Dann werden die Nullstellen von $g(z)$, welche ja die Pole von $r(z)$ sind, zunächst sämtlich reell sein müssen. Es folgt aber noch mehr. Da die R_i als Residuen einer logarithmischen Ableitung positiv sein müssen und $R_i/z_i > 0$ ist, so müssen auch die z_i positiv sein. Es folgt also aus (76.), *daß $g(z)$ lauter positive Nullstellen hat.*

Aus (76.) folgt weiter

(77.) $$g(z) = g_0 e^{\int_0^z r(z)\,dz} = g_0 e^{-cz} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_i}\right)^{R_i}.$$

Es ist also $g(z)$ vom Geschlecht Null bis auf den Faktor e^{-cz}.

Wir fassen das Resultat im folgenden Satze zusammen.

Satz IIa. *Es sei $g(z)$ eine reelle ganze rationale oder transzendente Funktion von z, $g(0) \neq 0$. Es besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $g(z)$ lauter positive Nullstellen hat und vom Geschlecht Null ist, bis auf einen Faktor $e^{-c \cdot z}$, wo $c \geqq 0$, darin, daß die quadratische Form $\sum_{i,k=0}^{n} s_{-(i+k+1)} x_i x_k$ positiv definit ist für jedes n, wo die s_{-l} durch (75.) bestimmt sind.*

Es ist insbesondere $g(z)$ eine ganze rationale Funktion von z mit lauter positiven Nullstellen, dann und nur dann, wenn diese quadratische Form bloß semi-definit positiv ist von einem gewissen n an.

Wie schon erwähnt, wird die quadratische Form $\sum_{i,k=0}^{n} s_{-(i+k+1)} x_i x_k$ dann und nur dann eigentlich positiv definit sein für jedes n, wenn die Determinanten

$$(78.) \qquad A_n = \begin{vmatrix} s_{-1} & s_{-2} & s_{-3} & \cdots & s_{-n} \\ s_{-2} & s_{-3} & s_{-4} & \cdots & s_{-(n+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{-(n-1)} & s_{-n} & s_{-(n+1)} & \cdots & s_{-(2n-2)} \\ s_{-n} & s_{-(n+1)} & s_{-(n+2)} & \cdots & s_{-(2n-1)} \end{vmatrix}$$

sämtlich positiv und von Null verschieden sind, und sie wird bloß semi-definit positiv sein von einem n an dann und nur dann, wenn

$$(79.) \quad A_i > 0 \text{ für } i = 1, 2, \ldots n, \text{ und } A_{n+m} = 0 \text{ für } m = 1, 2, \ldots .$$

Die Voraussetzungen (78.) oder (79.), sind äquivalent mit der Voraussetzung, daß die Potenzreihe $\frac{-g'(z) \cdot z}{g(z)}$ einen Kettenbruch mit reellen Koeffizienten und negativen Teilzählern erzeugt.

In ähnlicher Weise übertragen wir Satz III des vorigen Paragraphen auf $g(z)$. Wir bekommen folgenden Satz:

Satz IIIa. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine reelle und ganze transzendente Funktion $g(z)$ $(g(0) \neq 0)$ lauter* $\left\{\begin{matrix} \text{reelle} \\ \text{positive} \end{matrix}\right\}$ *Nullstellen hat und vom Geschlecht m ist, bis auf einen Faktor $e^{-c \cdot z^{m+1}}$, wo $c \geqq 0$ ist, besteht darin, daß die quadratische Form $\sum_{i,k=0}^{n} s_{-(i+k+m+1)} x_i x_k$*

positiv definit ist für jedes n bei $\left\{\begin{matrix}\text{ungeradem}\\ \text{geradem}\end{matrix}\right\}$ *m, wo die* s_{-l} *durch* (75.) *bestimmt sind.*

Es läßt sich auch folgender Satz leicht beweisen:

Satz IV. *Es sei* $g(z)$ *eine reelle ganze transzendente Funktion von* z $(g(0) \neq 0)$. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß* $g(z)$ *nur solche komplexen Nullstellen hat, die auf Strahlen in der z-Ebene liegen, wo m-te Einheitswurzeln sich befinden, und daß zugleich* $g(z)$ *vom Geschlechte* $m-1$ *bis auf einen Faktor* $e^{\gamma(z)}$ *ist, besteht darin, daß die quadratische Form* $\sum_{i,k=0}^{n} s_{-(i+k+1)m}\, x_i\, x_k$ *positiv definit ist für jedes n, wo die* s_{-l} *aus* (75.) *bestimmt sind.*

Dabei bedeutet $\gamma(z)$ eine ganze transzendente Funktion von z, die *nur* an die Bedingung geknüpft ist, daß in ihr die Koeffizienten von z^{km} für $k = 2, 3, \ldots$ verschwinden; der Koeffizient von z^m ist negativ.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf der Bildung des Produktes

$$g(z) \cdot g(\omega z) \cdot g(\omega^2 z) \cdots g(\omega^{m-1} z) = G(z^m),$$

wo ω eine primitive m-te Einheitswurzel ist, und Anwendung unserer Sätze auf $G(z^m)$.

§ 16. Ganze transzendente Funktionen vom Geschlecht Null, deren Nullstellen nur negative reelle Teile besitzen.

*Hurwitz**) hat gezeigt, daß ein reelles Polynom

$$P(z) = p(x, y) + i q(x, y), \text{ wo } z = x + iy,$$

dann und nur dann nur solche Nullstellen hat, deren reeller Teil negativ ist, wenn die Nullstellen der Polynome $p(0, y)$ und $q(0, y)$ in y durchweg reell und verschieden sind und sich gegenseitig trennen, und zwar in der Weise, daß die Residuen von $\frac{q(0,y)}{p(0,y)}$ negativ sind.

Man beweist es, indem man $P(z) = \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$ setzt und die Zunahme des Arcus ϑ von $P(z)$ für $z = iy$ betrachtet, wenn y von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft. Da dabei der Arcus jedes Faktors $\frac{z_i - z}{z_i}$ um π zunimmt, wenn z_i einen reellen negativen Teil besitzt, so wird der Arcus ϑ von $P(z)$ selbst um $n \cdot \pi$ zunehmen, wenn y von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, für $z = iy$. Nun ist $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{q(0,y)}{p(0,y)}$ für $z = iy$. Es

*) Math. Ann., Bd. 46.

muß also $\operatorname{tg}\vartheta$ n-mal von $+\infty$ nach $-\infty$ übergehen, und dies kann nur bei einer Nullstelle von $p(0,y)$ stattfinden (und einmal im Unendlichen, wenn $p(0,y)$ vom $(n-1)$-ten Grade und $q(0,y)$ vom n-ten Grade sind), wobei beim Übergang von $p(0,y)$ von $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}\right\}$ zu $\left\{\begin{matrix}\text{negativen}\\ \text{positiven}\end{matrix}\right\}$ Werten $q(0,y)$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sein muß. Dies bedeutet, daß die Nullstellen von $q(0,y)$ und $p(0,y)$ sämtlich reell verschieden sind und sich gegenseitig trennen in der Weise, daß die Residuen von $\frac{q(0,y)}{p(0,y)}$ negativ sind. Ebenso folgt umgekehrt, daß, wenn $p(0,y)$, $q(0,y)$ lauter reelle verschiedene Nullstellen haben und zugleich die Residuen von $\frac{q(0,y)}{p(0,y)}$ negativ sind, dann $P(z)=p(x,y)+iq(x,y)$ nur solche Nullstellen besitzt, deren reeller Teil negativ ist.

Wendet man nun auf $\frac{-q(0,y)}{p(0,y)}$ oder auf $\frac{-p(0,y)}{q(0,y)}$ (je nachdem n gerade oder ungerade ist) das Kriterium unseres Satzes I, Kapitel I, an, so gewinnt man ein entsprechendes Kriterium für $P(z)$.

Hurwitz hat diesem Kriterium folgende Gestalt gegeben. Ist $P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$, $a_0=1$, so müssen die n ersten Hauptunterdeterminanten der Determinante

$$(80.)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \ \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

positiv sein.

Wir wollen nun das Vorhergehende auf reelle ganze *transzendente* Funktionen vom Geschlecht Null übertragen.

Es sei $g(z)$ eine solche Funktion. Wir setzen

$$g(z)=\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_i}\right)=\xi(x,y)+i\eta(x,y).$$

Für $z=iy$, wird $g(iy)=\xi(0,y)+i\cdot\eta(0,y)$. Es werden auch bekanntlich $\xi(0,y)$ und $\eta(0,y)$ als Funktionen von y vom Geschlecht Null sein. Es wird

$$\xi(0,y)=\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{y}{\alpha_i}\right)^{l_i},$$

$$\eta(0,y)=c\cdot y\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{y}{\beta_i}\right)^{m_i}.$$

Wir nehmen nun an, daß die entsprechenden Hauptunterdeterminanten von (80.) für $g(z)$ und somit auch die Determinanten A_i (Satz I, Kap. I) aus den Koeffizienten der Entwicklung von $\frac{\eta(0,y)}{\xi(0,y)}$ nach y positiv sind; dann sind nach Satz I., wenn man $-r(y)\cdot y = \frac{\eta(0,y)}{\xi(0,y)}$ setzt, die Nullstellen α_i, β_i einfach, reell und trennen sich gegenseitig, wobei die Residuen von $\frac{\eta(0,y)}{\xi(0,y)}$ negativ werden. Bilden wir

$$\prod_{i=1}^{2n}\left(1-\frac{y}{\alpha_i}\right)+icy\prod_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{y}{\beta_i}\right)=g_{2n}(iy),$$

so wird $g_{2n}(iy)$ ein reelles Polynom in iy sein, und nach dem Vorhergehenden kann $g_{2n}(z)$ nur solche Nullstellen haben, deren reeller Teil negativ ist. Nun ist $g(z)=\operatorname{Lim}_{n=\infty} g_{2n}(z)$ gleichmäßig in jedem endlichen Bereiche, und nach einem bekannten Satze von *Hurwitz* sind die Nullstellen $g(z)$ die Häufungsstellen der Nullstellen von $g_{2n}(z)$. Es hat also $g(z)$ nur solche Nullstellen, deren reeller Teil negativ ist. Hat umgekehrt $g(z)=\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_i}\right)$ nur solche Nullstellen, deren reeller Teil negativ ist, und setzen wir

$$g_{2n}(z)=\prod_{i=1}^{2n}\left(1-\frac{z}{z_i}\right)=\xi_{2n}(x,y)+i\,\eta_{2n}(x,y),$$

so werden die entsprechenden $2n$ ersten Hauptunterdeterminanten aus (80.) von $g_{2n}(z)$ positiv sein müssen Es werden auch die Determinanten A_i des Satzes I, Kapitel I für $\frac{\eta_{2n}(0,y)}{\xi_{2n}(0,y)}$ positiv sein. Nun sind aber die entsprechenden Determinanten (80.) für $g(z)$ beliebig nahe denjenigen von $g_{2n}(z)$ für wachsende n, da ja die Koeffizienten von $g_{2n}(z)$ denjenigen von $g(z)$ beliebig nahe kommen, und sie sind somit auch positiv*). Es werden somit auch die Determinanten A_i für $\frac{\eta(0,y)}{\xi(0,y)}$ beliebig nahe denjenigen für $\frac{\eta_{2n}(0,y)}{\xi_{2n}(0,y)}$ sein, und wenn nun $\frac{\eta(0,y)}{\xi(0,y)}=t_0 y+t_1 y^2+\cdots$ ist, so wird die quadratische Form $\sum_{i,k=0}^{n} t_{i+k}x_i x_k$ positiv definit sein. Es wird somit nach § 12 $\frac{\eta(0,y)}{\xi(0,y)}$ einen Kettenbruch $K\left(\frac{1}{y}\right)$ mit reellen Koeffizienten und negativen Teilzählern erzeugen.

Es wird nach § 12, (66.)

$$\frac{\eta(0,y)}{\xi(0,y)}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d\Phi(u_i)}{1/y-u_i}.$$

*) Diese Bemerkung verdanke ich Herrn *G. Pólya*.

Ihre Residuen sind positiv in der Ebene $1/y$ und negativ in der Ebene y. Es folgt, daß sowohl $\xi(0, y)$ wie $\eta(0, y)$ lauter einfache reelle Nullstellen haben, die sich gegenseitig trennen, und zwar in der Weise, daß die Residuen von $\frac{\eta(0, y)}{\xi(0, y)}$ negativ sind. Wir haben somit folgenden Satz gewonnen:

Satz IV. *Es sei $g(z)$ eine reelle ganze transzendente Funktion vom Geschlecht Null:* $g(z) = 1 + g_1 z + g_2 z^2 + \cdots = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $g(z)$ nur solche Nullstellen hat, deren reeller Teil negativ ist, besteht darin, daß alle Hauptunterdeterminanten der Determinante

$$\begin{vmatrix} g_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots \\ g_3 & g_2 & g_1 & 1 & 0 & \cdots\cdots \\ g_5 & g_4 & g_3 & g_2 & g_1 & 1\ 0\ \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

positiv sind). Diese Bedingung ist zugleich notwendig und hinreichend dafür, daß sowohl $\xi(0, y)$ wie $\eta(0, y)$ lauter reelle verschiedene Nullstellen haben, die sich gegenseitig trennen, und zwar in der Weise, daß die Residuen von $\frac{\eta(0, y)}{\xi(0, y)}$ negativ sind.*

§ 17. Beispiele.

Es ist nach *Lambert*

$$\frac{x \operatorname{cotg} x - 1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \cfrac{-x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cdots}}}.$$

Setzen wir $-x^2 = z$, so wird dies die Form haben

$$\cfrac{z}{d_1 + \cfrac{z}{d_2 + \cfrac{z}{d_3 + \cdots}}}, \quad d_i \text{ reell.} \tag{81.}$$

Es läßt sich (81.) in einen Kettenbruch $K\left(\frac{1}{z}\right)$ mit reellen Koeffizienten und negativen Teilzählern transformieren, wenn $d_i \neq 0$ und $d_{2i+1} > 0$ ist für jedes i. Es wird

*) Genauer bedeutet dies, daß sie entweder sämtlich > 0 sind, oder daß sie bis zu einer Stelle > 0, von da an sämtlich 0 sind.

$$K(\lambda) = \cfrac{1}{\cfrac{d_1}{a_1+\lambda-\cfrac{b_1^2}{\cfrac{a_2+\lambda-\cfrac{b_2^2}{\ddots}}{}}}},$$

wo

$$b_i^2 = \frac{1}{d_{2i-1}d_{2i}^2 d_{2i+1}}, \quad a_i = \frac{1}{d_{2i-2}d_{2i-1}} + \frac{1}{d_{2i-1}d_{2i}}, \quad \lambda = \frac{1}{z}.$$

Die geraden Näherungsbrüche von (81.) werden die Näherungsbrüche von $K(\lambda)$ sein.

Setzen wir $\frac{x\operatorname{cotg} x - 1}{2} = f(-x^2) = f(z)$, wo $-x^2 = z$ ist, so wird die Potenzreihe $f(z)$, die mit z anfängt, einen Kettenbruch $K\left(\frac{1}{z}\right)$ mit reellen Koeffizienten und negativen Teilzählern erzeugen, der gegen $f(z)$ konvergiert.

Es wird nach § 12, (67.)

$$\frac{-f(z)}{z} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_i}{z - z_i} - c.$$

Es wird nun

$$\frac{\operatorname{cotg} x}{2x} - \frac{1}{2x^2} = \frac{d\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{d(x^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-R_i}{x^2 - n^2\pi^2} - c, \quad c \geqq 0.$$

Nun muß $-R_i$ als Residuum der logarithmischen Ableitung von $\frac{\sin x}{x}$ nach x^2 gleich 1 sein, weil ja $\frac{\sin x}{x}$ einfache Nullstellen hat. Es wird somit $\frac{\operatorname{cotg} x}{2x} - \frac{1}{2x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2\pi^2} - c$; setzen wir $x = \frac{\pi}{2}$, so wird

$$c = \frac{2}{\pi^2} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1} = \frac{2}{\pi^2}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right] = 0.$$

Es folgt schließlich

$$\frac{\operatorname{cotg} x}{2x} - \frac{1}{2x^2} = \frac{d\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{d(x^2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2 - n^2\pi^2}$$

und daraus

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Als zweites Beispiel führen wir die *Bessel*schen Funktionen $I_n(z)$ an. Es ist

$$I_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2\nu}}{\Gamma(\nu+1)\cdot\Gamma(n+\nu+1)}.$$

Aus dieser Darstellung gewinnt man leicht die Rekursionsformel

$$\frac{2n}{z} I_n(z) = I_{n-1}(z) + I_{n+1}(z).$$

Daraus folgt sofort eine Kettenbruchentwicklung für $\frac{I_n(z)}{I_{n-1}(z)}$. Es wird $\frac{I_n(z)}{I_{n-1}(z)}$ folgenden Kettenbruch $K\left(\frac{1}{z}\right)$ erzeugen, der gegen $\frac{I_n(z)}{I_{n-1}(z)}$ konvergiert:

$$(82.) \qquad K(\lambda) = \frac{1}{2n} \cdot \cfrac{1}{\lambda - \cfrac{\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{2(n+1)}}{\lambda - \cfrac{\frac{1}{2(n+1)}\cdot\frac{1}{2(n+2)}}{\lambda - \cdot\ \cdot}}}, \quad \text{wo } \lambda = \frac{1}{z}.$$

Ist zunächst $n > 0$, so hat $K(\lambda)$ reelle Koeffizienten und negative Teilzähler, und es wird nach § 12, (66.)

$$(83.) \qquad 2n \frac{I_n(z)}{I_{n-1}(z)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d\Phi(u_i)}{\lambda - u_i} = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d\Phi(u_i)\cdot z_i \cdot z}{z - z_i} + d\Phi(0)$$

$$= -\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{d\Phi\left(\frac{1}{z_i}\right)\cdot z_i^2}{z - z_i} + d\Phi\left(\frac{1}{z_i}\right)\cdot z_i \right) + d\Phi(0),$$

wo $z_i = \frac{1}{u_i}$ reell ist. Es hat also $\frac{I_n(z)}{I_{n-1}(z)}$ lauter einfache reelle Pole. Es folgt auch aus den vorangegangenen Paragraphen, daß $\frac{I_n(z)}{I_{n-1}(z)}$ lauter reelle *einfache* Nullstellen hat und daß sie in ihrem Konvergenzkreise von Null verschieden sind.

(Dies bedeutet, daß die absolut genommenen kleinsten Nullstellen von $I_n(z)$, außer $z = 0$, mit n wachsen).

Nun gilt $\frac{dz^{-(n-1)} I_{n-1}(z)}{dz} = -z^{-(n-1)} I_n(z)$. Es ist somit $\frac{-I_n(z)}{I_{n-1}(z)}$ die logarithmische Ableitung von $I_{n-1}(z) \cdot z^{-(n-1)}$.

Es besagt also Gleichung (83.), daß die logarithmische Ableitung von $z^{-(n-1)} I_{n-1}(z)$ eine *Mittag-Lefflersche* Entwicklung hat, deren konvergenzerzeugender Summand eine Konstante ist, ohne daß eine ganze Funktion zu dieser Entwicklung hinzukommt.

Es folgt daraus, daß *die reelle ganze transzendente Funktion* $z^{-n} I_n(z)$ *vom Geschlecht* 1 *ist.* Sie hat, wie schon erwähnt, *lauter reelle einfache Nullstellen.*

Ist n negativ und nicht ganz, so wird in (82.) ein positiver Teilzähler auftreten. Es wird aber dann $K(\lambda)$ einen Rest-Kettenbruch $R(\lambda)$ haben, der lauter negative Teilzähler hat und gleich $\frac{I_{n+l}(z)}{I_{n+l-1}(z)}\left(\frac{-1}{2(n+l-1)}\right)$ ist, wo $n+l>0$ ist. Nun kann man $K(\lambda)$ durch $R(\lambda)$ linear gebrochen ausdrücken mit Koeffizienten, die Polynome in z sind. Es wird somit

$$(84.) \qquad \frac{I_n(z)}{I_{n-1}(z)} = \frac{p(z)\,I_{n+l}(z) + q(z)\cdot I_{n+l-1}(z)}{r(z)\,I_{n+l}(z) + s(z)\,I_{n+l-1}(z)},$$

wo $p(z), q(z), r(z), s(z)$ Polynome in z sind. Nun ist nach (83.)

$$(85.) \quad 2(n+l)\frac{I_{n+l}(z)}{I_{n+l-1}(z)} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{d\Phi(u_i)}{\lambda-u_i} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{M_i}{\lambda-u_i}, \quad M_i>0,$$

wenn man $d\Phi(u_i) = M_i$ setzt.

Man kann nun zeigen, daß eine Entwicklung (85.) mit keiner reellen rationalen Funktion übereinstimmt für unendlich viele Punkte, die außerhalb der Intervalle u_i gelegen sind. (Dagegen muß (85.) mit jeder reellen rationalen Funktion in unendlich vielen Punkten übereinstimmen in den Intervallen der u_i, weil ja (85.) in einem Intervalle (u_i, u_{i+1}) von $+\infty$ bis $-\infty$ läuft)*).

Daraus folgt insbesondere, daß $r(z)\cdot I_{n+l}(z) + s(z)\,I_{n+l-1}(z)$ nur höchstens endlich viele nicht reelle Nullstellen haben kann.

Es wird nach (84.) *auch* $I_{n-1}(z)$ *auch für ein negatives* n *(nicht ganz) nur endlich viele nicht reelle Nullstellen haben können.*

Aus der Formel $\frac{d\,z^{-n}I_n(z)}{dz} = -z^{-n}I_{n+1}(z)$ folgt, daß wenn $z^{-(n+1)}I_{n+1}(z)$ vom Geschlecht 1 ist, auch $z^{-n}I_n(z)$ vom Geschlecht 1 ist. Wiederholt man diesen Schluß, indem man $n-1$ für n setzt, usw., so folgt schließlich daraus, daß $z^{-n}I^n(z)$ vom Geschlecht 1 ist für *positive* n, daß $z^{-n}I_n(z)$ *vom Geschlecht* 1 *ist auch für negative nicht ganze* n.

---

*) Vgl. *A. Hurwitz*, Festschrift der Hamburger mathematischen Gesellschaft. Ganze transzendente Funktionen.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 114

Kapitel I. Formale Entwicklungen 118

§ 1. Potenzreihe und Kettenbruchentwicklung 118

§ 2. Expliziter Ausdruck der Koeffizienten des Kettenbruchs durch die Koeffizienten der Potenzreihe 121

§ 3. Realitätsvoraussetzungen 123

§ 4. Über ganze rationale Funktionen mit lauter reellen Nullstellen 125

Kapitel II. Konvergenz des Kettenbruchs bei konvergenter Potenzreihe 129

§ 5. Die Behauptung 129

§ 6. Zwei Hilfssätze 130

§ 7. Der Beweis 132

Kapitel III. Darstellung des Kettenbruches durch ein bestimmtes Integral 134

§ 8. Bildung von Belegungsfunktionen aus den Partialbruchzerlegungen. 134

§ 9. Ein Auswahlverfahren 137

§ 10. Divergenzmöglichkeit des Kettenbruches 143

Kapitel IV. Funktionentheoretische Anwendungen 145

§ 11. Die erzeugende Potenzreihe besitzt einen Konvergenzkreis . 145

§ 12. Die erzeugende Potenzreihe ist Element einer meromorphen Funktion 147

§ 13. Beispiel für eine eigentliche Integraldarstellung 151

§ 14. Realität der Pole und Nullstellen und die Form der *Mittag-Lefflers*chen Entwicklung meromorpher Funktionen . . . 152

§ 15. Realität der Nullstellen und Geschlecht ganzer transzendenter Funktionen 157

§ 16. Ganze transzendente Funktionen vom Geschlecht Null, deren Nullstellen nur negative reelle Teile besitzen 159

§ 17. Beispiele 162

*Laplace*sche Integrale als Lösungen nicht linearer Differentialgleichungen.

Von Herrn *J. Horn* in Darmstadt.

Die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung, deren Koeffizienten lineare Funktionen von x sind, (die *Laplace*sche Differentialgleichung) wird durch ein bestimmtes Integral mit geeignetem Integrationsweg

$$y = \int v(z)\, e^{zx}\, dz$$

befriedigt, wo $v(z)$ einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung genügt, deren Koeffizienten ganze Funktionen n-ten Grades von z sind. Wendet man die Methode von *Laplace* auf eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung an, deren Koeffizienten ganze Funktionen p-ten Grades von x sind, so ist die lineare Differentialgleichung, welcher $v(z)$ genügt, (die *Laplace*sche Transformierte der ursprünglichen Differentialgleichung) von der p-ten Ordnung und hat als Koeffizienten ganze Funktionen n-ten Grades von z. *Poincaré* hat die *Laplace*sche Transformation zur Untersuchung des Verhaltens der Integrale einer linearen Differentialgleichung bei der Annäherung der Veränderlichen an die Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ benutzt*). Ihre Anwendbarkeit schien zunächst auf lineare Differentialgleichungen beschränkt, deren Koeffizienten rationale Funktionen sind**). Wenn man die *Laplace*sche Transformation auf eine lineare

*) Vgl. *Poincaré*, Am. Journ. of Math., Bd. 7, und Acta math., Bd. 8, sowie meine Arbeiten im 49., 50. und 71. Bd. der Math. Ann.

**) Vgl. übrigens die Art, wie *Birkhoff* (Trans. of the Am. Math. Soc. 1909 und 1913; Math. Ann., Bd. 74) die Anwendung der *Laplace*schen Transformation auf Differentialgleichungen mit nicht rationalen Koeffizienten ermöglicht.

Differentialgleichung anwendet, deren Koeffizienten Potenzreihen sind, erscheint als Transformierte eine lineare Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung oder, was auf dasselbe hinauskommt, eine lineare Integralgleichung vom *Volterra*schen Typus.

In der vorliegenden Arbeit wende ich die *Laplace*sche Transformation auf eine *nicht lineare Differentialgleichung* erster Ordnung

$$(A.) \qquad x^{k+1}\frac{dy}{dx} + y = f(x,y)$$

an, wo $k > 0$ eine ganze positive Zahl und

$$f(x,y) = \Sigma A_{\lambda\mu} x^\lambda y^\mu \qquad (\lambda=1, \mu=0; \lambda+\mu \geq 2)$$

eine für hinreichend kleine Werte von $|x|$ und $|y|$ konvergente Potenzreihe ist*).

Zunächst wird $k = 1$ angenommen. Eine ausgezeichnete partikuläre Lösung η der Differentialgleichung

$$(A_1.) \qquad x^2\frac{dy}{dx} + y = f(x,y)$$

wird als *Laplace*sches Integral

$$\eta = \int_0^\infty w(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt$$

dargestellt, wobei über die Gerade $\arg t = \omega\,(-\pi < \omega < \pi)$ integriert wird. Für die Funktion $w(t)$ ergibt sich eine *nicht lineare Integralgleichung vom Volterraschen Typus*, welche die nötigen Aufschlüsse über das Verhalten von $w(t)$ gibt**). (§§ 1—4.)

Für die Differentialgleichung (A.), in welcher $k > 1$ ist, erhält man k ausgezeichnete partikuläre Integrale $\eta_m (m = 0, 1, \ldots k-1)$ in der Form

$$\eta_m = \sum_{\nu=0}^{k-1} x^\nu \int_0^\infty w_\nu(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt,$$

wobei wieder die Gerade $\arg t = \omega\,(-\pi < \omega < \pi)$ als Integrationsweg benutzt wird. Diese Darstellung von η_m gilt in einem dem Sektor

---

*) In meinen Arbeiten im 119. und 141. Bd. dieses Journals und im 51. Bd. der Math. Ann. ist diese Differentialgleichung nach anderen Methoden behandelt.

**) Die Methode, welche *Volterra* auf gewisse nicht lineare Integralgleichungen angewandt hat, (vgl. *Volterra*, Leçons sur les fonctions de lignes, Paris 1913, p. 131 bis 146) konnte bei unserer Integralgleichung (Gleichung $(B_1.)$ in § 1) nicht benutzt werden.

$$\frac{2m\pi - \frac{3\pi}{2}}{k} < \arg x < \frac{2m\pi + \frac{3\pi}{2}}{k}$$

angehörigen Gebiet, und die Funktionen $w_p(t)$ $(p = 0, 1, \ldots k-1)$ genügen einem System von nicht linearen Integralgleichungen. (§§ 5—7.)

Da die weitere Untersuchung der hier dargestellten und der übrigen Integrale der Differentialgleichung (A.) den Gegenstand einer späteren Arbeit bilden soll, so enthält § 8 nur einige Bemerkungen über die Entwicklung der Integrale η und η_m in konvergente Fakultätenreihen und ihre asymptotische Darstellung durch die der Differentialgleichung (A.) formal genügende divergente Potenzreihe.

Die Anwendung der *Borel*schen Summation divergenter Reihen*) hat bisher die Theorie der Differentialgleichungen nicht wesentlich gefördert. Das *Laplace*sche Integral, welches nach *Borel* aus der der Differentialgleichung $(A_1.)$ genügenden divergenten Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$ herzuleiten wäre, ergibt sich hier aus der Differentialgleichung ohne Benutzung der Reihe und die *Borel*sche assoziierte Funktion aus einer *Volterra*schen Integralgleichung**).

§ 1.

In der nicht linearen Differentialgleichung

$$(A_1.) \qquad x^2 \frac{dy}{dx} + y = f(x, y)$$

sei

$$f(x, y) = \Sigma A_{\lambda\mu} x^\lambda y^\mu \qquad (\lambda = 1, \mu = 0;\ \lambda + \mu \geq 2)$$

eine Potenzreihe, welche für hinreichend kleine Werte von $|x|$ und $|y|$ konvergiert. Wir suchen eine Lösung der Differentialgleichung $(A_1.)$ als *Laplace*sches Integral

$$y = \int_0^\infty w(t) e^{-\frac{t}{x}} dt$$

darzustellen; als Integrationsweg nehmen wir die Gerade $\arg t = \omega$, wo $-\pi < \omega < \pi$ ist.

---

*) *Borel*, Leçons sur les séries divergentes (Paris 1901), p. 87—119.

**) Es sei hier auf die Ergänzung hingewiesen, welche die *Borel*sche Theorie durch *Watson* (A Theory of Asymptotic Series, Phil. Transactions of the Royal Society of London, A. 211) erhalten hat.

Indem man zunächst formal rechnet, erhält man durch partielle Integration

$$xy = x\int_0^\infty w(t)\,e^{-\frac{t}{x}}\,dt = \Big[xe^{-\frac{t}{x}}\int_0^t w(t)\,dt\Big]_0^\infty + \int_0^\infty\int_0^t w(t)\,dt\cdot e^{-\frac{t}{x}}\,dt$$

oder, wenn

$$\lim_{t=\infty} e^{-\frac{t}{x}}\int_0^t w(t)\,dt = 0$$

ist,

$$xy = \int_0^\infty\int_0^t w(t)\,dt\cdot e^{-\frac{t}{x}}\,dt.$$

Durch nochmalige partielle Integration findet man, indem man die Formel

$$\int_0^t dt\int_0^t w(t)\,dt = \int_0^t (t-\tau)\,w(\tau)\,d\tau$$

berücksichtigt,

$$x^2y = \int_0^\infty\int_0^t (t-\tau)\,w(\tau)\,d\tau\cdot e^{-\frac{t}{x}}\,dt,$$

vorausgesetzt, daß

$$\lim_{t=\infty} e^{-\frac{t}{x}}\int_0^t (t-\tau)\,w(\tau)\,d\tau = 0$$

ist. Allgemein ist für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$

$$x^\lambda y = \int_0^\infty\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}\,w(\tau)\,d\tau\cdot e^{-\frac{t}{x}}\,dt$$

unter der Voraussetzung

$$\lim_{t=\infty} e^{-\frac{t}{x}}\int_0^\infty (t-\tau)^{\lambda'-1}\,w(\tau)\,d\tau = 0. \qquad (\lambda' = 1, 2, \ldots \lambda)$$

Ferner ist

$$x^2\frac{dy}{dx} = \int_0^\infty t\,w(t)\,e^{-\frac{t}{x}}\,dt.$$

Es möge jetzt, wenn

$$y_1 = \int_0^\infty w_1(t)\,e^{-\frac{t}{x}}\,dt, \qquad y_2 = \int_0^\infty w_2(t)\,e^{-\frac{t}{x}}\,dt$$

ist, das Produkt y_1y_2 als *Laplace*sches Integral dargestellt werden. Der Integrationsweg sei zunächst die positive reelle Achse der t-Ebene ($\arg t = 0$). Das Integral

$$y_2 = \int_0^\infty w_2(z)\,e^{-\frac{z}{x}}\,dz$$

geht durch die Substitution $z = t - \tau$, wo $\tau \geqq 0$ ist, in

$$y_2 = e^{\frac{\tau}{x}} \int_{\tau}^{\infty} w_2(t-\tau) e^{-\frac{t}{x}} dt$$

über. Durch Multiplikation dieses Ausdrucks mit

$$y_1 = \int_0^{\infty} w_1(\tau) e^{-\frac{\tau}{x}} d\tau$$

erhält man

$$y_1 y_2 = \int_0^{\infty} w_1(\tau) e^{-\frac{\tau}{x}} y_2 d\tau = \int_0^{\infty} w_1(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} w_2(t-\tau) e^{-\frac{t}{x}} dt,$$

oder, indem man die Integrationen nach t und τ vertauscht,

$$y_1 y_2 = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{x}} dt \int_0^{t} w_1(\tau)\, w_2(t-\tau)\, d\tau.$$

Unter Benutzung der symbolischen Bezeichnung

$$w_1 w_2(t) = \int_0^{t} w_1(\tau) w_2(t-\tau) d\tau$$

hat man die Gleichung

$$y_1 y_2 = \int_0^{\infty} w_1 w_2(t)\, e^{-\frac{t}{x}} dt.$$

Wenn der Integrationsweg sowohl für y_1 als auch für y_2 die Gerade $\arg t = \omega$ ist, setzt man $t = |t| e^{i\omega}$, $\tau = |\tau| e^{i\omega}$ und wendet die bisherige Schlußweise an. Auch dann gilt der gefundene Integralausdruck für $y_1 y_2$ mit dem Integrationsweg $\arg t = \omega$; das zur Definition des symbolischen Produktes $w_1 w_2(t)$ dienende Integral wird über die Gerade $0 \ldots t$ erstreckt.

Hiernach ist, wenn

$$w^2(t) = \int_0^{t} w(\tau) w(t-\tau) d\tau$$

gesetzt wird,

$$y^2 = \int_0^{\infty} w^2(t)\, e^{-\frac{t}{x}} dt$$

und allgemein, wenn $w^{\mu}(t)$ durch die Rekursionsformel

$$w^{\mu}(t) = \int_0^{t} w(\tau) w^{\mu-1}(t-\tau) d\tau$$

definiert wird,

$$y^{\mu} = \int_0^{\infty} u^{\mu}(t)\, e^{-\frac{t}{x}} dt. \qquad (\mu = 2, 3, \ldots)$$

Ferner ist

$$x^\lambda y^\mu = \int_0^\infty \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} w^\mu(\tau)\, d\tau \cdot e^{-\frac{t}{x}}\, dt$$

unter der Voraussetzung

$$\lim_{t=\infty} e^{-\frac{t}{x}} \int_0^t (t-\tau)^{\lambda'-1} w^\mu(\tau)\, d\tau = 0^*). \qquad (\lambda'=1, 2, \ldots \lambda)$$

Es ergibt sich so

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y - f(x, y) = \int_0^\infty W e^{-\frac{t}{x}}\, dt,$$

so daß y eine Lösung der Differentialgleichung (A_1.) ist, wenn $w(t)$ der Gleichung $W = 0$, der *Laplace*schen Transformierten von (A_1.), genügt. Als *Laplace*sche Transformierte erscheint hier die nicht lineare Integralgleichung vom *Volterra*schen Typus

$$(1+t)\, w(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{\lambda 0} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} + \sum_{\mu=2}^{\infty} A_{0\mu} w^\mu(t) + \int_0^t \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{\lambda\mu} \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} w^\mu(\tau)\, d\tau.$$

Wir nehmen an, daß die Potenzreihenentwicklung von $f(x, y)$ für $|x| = \frac{1}{h}$, $|y| = \frac{1}{k}$ konvergiert. Dann ist eine positive Größe G so vorhanden, daß für alle λ und μ

$$|A_{\lambda\mu}| \leqq G h^\lambda k^\mu$$

ist. Demnach ist, wenn

$$G_\mu(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{\lambda\mu} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \qquad (\mu=0, 1, 2, \ldots)$$

gesetzt wird,

$$|G_\mu(t)| \leqq G h k^\mu \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(h|t|)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} = G h k^\mu e^{h|t|},$$

so daß $G_\mu(t)$ eine ganze transzendente Funktion von t ist. Unter Benutzung der Bezeichnung

$$G_\mu w^\mu(t) = \int_0^t G_\mu(t-\tau)\, w^\mu(\tau)\, d\tau = \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{\lambda\mu} \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} w^\mu(\tau)\, d\tau$$

schreibt sich die *Laplace*sche Transformierte in der Form

$$(B_1.) \qquad (1+t)\, w(t) = G_0(t) + \sum_{\mu=2}^{\infty} A_{0\mu} w^\mu(t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} G_\mu w^\mu(t).$$

---

*) Aus den Eigenschaften der Funktion $w(t)$ (§ 4) folgt, daß das *Laplace*sche Integral für y in einem gewissen Gebiet der x-Ebene konvergiert und die angegebenen Umformungen zulässig sind.

§ 2.

Wenn die Differentialgleichung (A_1.) durch die (im allgemeinen divergente) Potenzreihe

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

formal befriedigt wird, wird die Integralgleichung (B_1.) durch die Potenzreihe

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

(welche nach § 4 für $|t| < 1$ konvergiert) befriedigt.

Um dies direkt zu zeigen, machen wir von folgender Betrachtung Gebrauch.

Wenn man die beiden Potenzreihen

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n, \qquad G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n x^n$$

formal multipliziert, erhält man

$$F(x)G(x) = \sum_{n=2}^{\infty} C_n x^n, \qquad C_n = A_1 B_{n-1} + A_2 B_{n-2} + \cdots + A_{n-1} B_1.$$

Das symbolische Produkt der beiden Potenzreihen

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

das wir lediglich formal berechnen, ist

$$fg(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \tau^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n (t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\, d\tau$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{A_{n-p}}{(n-p-1)!} \frac{B_{p+1}}{p!} \int_0^t \tau^{n-p-1} (t-\tau)^p\, d\tau.$$

Durch die Substitution $\tau = t\xi$ erhält man

$$\int_0^t \tau^{n-p-1} (t-\tau)^p\, d\tau = t^n \int_0^1 \xi^{n-p-1} (1-\xi)^p\, d\xi$$

$$= t^n B(n-p, p+1) = \frac{p!(n-p-1)!}{n!} t^n.$$

Demnach ist

$$fg(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{n-1} A_{n-p} B_{p+1} \cdot \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n+1} \frac{t^n}{n!}$$

oder

$$fg(t) = \sum_{n=2}^{\infty} C_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Wenn

$$(F(x))^{\mu} = \sum_{n=\mu}^{\infty} A_n^{(\mu)} x^n$$

ist, ist

$$f^{\mu}(t) = \sum_{n=\mu}^{\infty} A_n^{(\mu)} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Wir schreiben die Differentialgleichung (A_1.) in der Form

$$y + x^2 \frac{dy}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{\lambda 0} x^\lambda + \sum_{\mu=2}^{\infty} A_{0\mu} y^\mu + \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{\lambda\mu} x^\lambda y^\mu .$$

Aus

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

folgt

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) C_{n-1} x^n ;$$

ferner sei

$$y^\mu = \sum_{n=\mu}^{\infty} C_n^{(\mu)} x^n , \qquad \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{\lambda\mu} x^\lambda \cdot y^\mu = \sum_{n=\mu+1}^{\infty} D_n^{(\mu)} x^n ,$$

wo $C_n^{(\mu)}$ von $C_1, \dots C_{n-\mu+1}$ und $D_n^{(\mu)}$ von $C_1, \dots C_{n-\mu}$ abhängt. Setzt man die Reihe für y in die Differentialgleichung (A_1.) ein, und vergleicht man die Koeffizienten von x^n, so erhält man die zur Bestimmung von C_n dienende Rekursionsformel

$$C_n + (n-1) C_{n-1} = A_{n0} + \sum_{\mu=2}^{\infty} A_{0\mu} C_n^{(\mu)} + \sum_{\mu=1}^{\infty} D_n^{(\mu)} ,$$

deren rechte Seite nur $C_1, \dots C_{n-1}$ enthält.

Wenn man

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

setzt, ist

$$t\, w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{t^n}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) C_{n-1} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

entsprechend der Reihe für $x^2 \frac{dy}{dx}$ und

$$w^\mu(t) = \sum_{n=\mu}^{\infty} C_n^{(\mu)} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} .$$

Dem Produkt von $\sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{\lambda\mu} x^\lambda$ und y^μ entspricht das symbolische Produkt von

$$G_\mu(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{\lambda\mu} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

und $w^\mu(t)$, d. i.

$$G_\mu w^\mu(t) = \sum_{n=\mu+1}^{\infty} D_n^{(\mu)} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} .$$

Setzt man die Reihe für $w(t)$ in die Integralgleichung (B_1.) ein, so erhält man durch Vergleichung der Koeffizienten von $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ die frühere Rekursionsformel

$$C_n + (n-1) C_{n-1} = A_{n0} + \sum_{\mu=2}^{\infty} A_{0\mu} C_n^{(\mu)} + \sum_{\mu=1}^{\infty} D_n^{(\mu)} ,$$

w. z. b. w.

Die Koeffizienten der Potenzreihe $w(t)$ von t, welche die Integralgleichung $(B_1.)$ befriedigt, sind demnach eindeutig bestimmt.

§ 3.

Die Veränderliche t werde entweder auf den Kreis

$$|t| \leqq 1-\varepsilon \qquad (0<\varepsilon<1)$$

oder auf den Sektor

$$|\arg t| \leqq \pi - \theta \qquad (0<\theta<\pi)$$

beschränkt, so daß

$$|1+t| \geqq \varepsilon, \quad |1+t| \geqq \sin\theta$$

ist. Die reellen positiven Größen $\mathfrak{A}_{\lambda\mu}$ seien so gewählt, daß

$$\frac{|A_{\lambda\mu}|}{\varepsilon} \leqq \mathfrak{A}_{\lambda\mu}, \quad \frac{|A_{\lambda\mu}|}{\sin\theta} \leqq \mathfrak{A}_{\lambda\mu}, \quad \mathfrak{A}_{\lambda\mu} \leqq \mathfrak{G}\, h^\lambda k^\mu$$

ist. Setzt man

$$\mathfrak{G}_\mu(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \mathfrak{A}_{\lambda\mu} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!},$$

wo unter t eine reelle positive Veränderliche verstanden wird, so ist

$$\mathfrak{G}_\mu(t) \leqq \mathfrak{G}\, h k^\mu e^{ht},$$

$$|G_\mu(t)| \leqq \varepsilon\, \mathfrak{G}_\mu(|t|), \quad |G_\mu(t)| \leqq \sin\theta \cdot \mathfrak{G}_\mu(|t|).$$

Wir betrachten zunächst die Integralgleichung

$$(\mathfrak{B}_1.) \qquad \mathfrak{w}(t) = \mathfrak{G}_0(t) + \sum_{\mu=2}^{\infty} \mathfrak{A}_{0\mu}\, \mathfrak{w}^\mu(t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \mathfrak{G}_\mu\, \mathfrak{w}^\mu(t),$$

die als *Laplace*sche Transformierte der Gleichung

$$(\mathfrak{A}_1.) \qquad \mathfrak{y} = \Sigma\, \mathfrak{A}_{\lambda\mu}\, \mathfrak{x}^\lambda\, \mathfrak{y}^\mu \qquad (\lambda=1,\ \mu=0;\ \lambda+\mu \geq 2)$$

aufgefaßt werden kann. Denn wenn die Funktion $\mathfrak{w}(t)$ der Integralgleichung $(\mathfrak{B}_1.)$ genügt und gewisse Bedingungen erfüllt, stellt, wie die Schlußweise von § 1 zeigt, das Integral

$$\mathfrak{y} = \int_0^\infty \mathfrak{w}(t)\, e^{-\frac{t}{\mathfrak{x}}}\, dt$$

eine Lösung der Gleichung $(\mathfrak{A}_1.)$ dar.

Die Gleichung $(\mathfrak{A}_1.)$ wird durch eine Potenzreihe

$$\mathfrak{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}_n\, \mathfrak{x}^n$$

befriedigt, welche für $|\mathfrak{x}| \leqq \frac{1}{\sigma}$ konvergiert, wo $\sigma > 0$ und endlich ist; die positiven Koeffizienten $\mathfrak{C}_n$ ergeben sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{A}_{10}\,,\\
&\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{A}_{11}\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{A}_{02}\mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{A}_{20}\,,\\
&\mathfrak{C}_3 = \mathfrak{A}_{11}\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{A}_{21}\mathfrak{C}_1 + 2\mathfrak{A}_{02}\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{A}_{03}\mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{A}_{30}\,,\\
&\cdots\cdots\cdots

$$\mathfrak{w}(t) = \mathfrak{w}_0(t) + \alpha\,\mathfrak{w}_1(t) + \alpha^2\mathfrak{w}_2(t) + \cdots$$

entwickelt werden kann;

$$\mathfrak{w}_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}_n^{(0)} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$\mathfrak{w}_1(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \mathfrak{C}_n^{(1)} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$\mathfrak{w}_2(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \mathfrak{C}_n^{(2)} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

. . . . . .

sind beständig konvergente Potenzreihen von t mit positiven Koeffizienten.

Setzt man die Reihe für $\mathfrak{w}(t)$ in die durch Einführung des Parameters α abgeänderte Gleichung ($\mathfrak{B}_1$.) ein und vergleicht man die Koeffizienten von $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \ldots$, so erhält man die Formeln

$$\mathfrak{w}_0(t) = \mathfrak{G}_0(t),$$

$$\mathfrak{w}_1(t) = \mathfrak{G}_1\,\mathfrak{w}_0(t),$$

$$\mathfrak{w}_2(t) = \mathfrak{G}_1\,\mathfrak{w}_1(t) + \mathfrak{A}_{02}\,\mathfrak{w}_0^2(t) + \mathfrak{G}_2\,\mathfrak{w}_0^2(t),$$

. . . . . .

§ 4.

Wir ändern die Integralgleichung (B_1.) durch Einführung eines Parameters α ab:

$$(1+t)\,w(t) = G_0(t) + \sum_{\mu=2}^{\infty} \alpha^\mu A_{0\mu}\,w^\mu(t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha^\mu G_\mu\,w^\mu(t).$$

Wir setzen

$$w(t) = w_0(t) + \alpha\,w_1(t) + \alpha^2 w_2(t) + \cdots$$

und erhalten durch Vergleichung der Koeffizienten von $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \ldots$ die Gleichungen

$$(1+t)\,w_0(t) = G_0(t),$$

$$(1+t)\,w_1(t) = G_1\,w_0(t),$$

$$(1+t)\,w_2(t) = G_1\,w_1(t) + A_{02}\,w_0^2(t) + G_2\,w_0^2(t),$$

. . . . . .

Wenn t entweder auf den Kreis $|t| \leqq 1-\varepsilon$ oder auf den Sektor $|\arg t| \leqq \pi - \theta$ beschränkt und $|t| = \mathfrak{t}$ gesetzt wird, ist

$$\left|\frac{A_{\lambda\mu}}{1+t}\right| \leqq \mathfrak{A}_{\lambda\mu}, \qquad \left|\frac{G_\mu(t)}{1+t}\right| \leqq \mathfrak{G}_\mu(\mathfrak{t}).$$

Die Vergleichung der Formeln für $w_0(t), w_1(t), w_2(t), \ldots$ mit denjenigen für $\mathfrak{w}_0(\mathfrak{t}), \mathfrak{w}_1(\mathfrak{t}), \mathfrak{w}_2(\mathfrak{t}), \ldots$ ergibt zunächst

$$|w_0(t)| \leqq \mathfrak{w}_0(t);$$

demnach ist

$$\left|\frac{G_1 w_0(t)}{1+t}\right| \leqq \mathfrak{G}_1 \mathfrak{w}_0(t)$$

und somit

$$|w_1(t)| \leqq \mathfrak{w}_1(t).$$

So fortfahrend findet man allgemein

$$|w_\nu(t)| \leqq \mathfrak{w}_\nu(t). \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Demnach ist die Reihe

$$w(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu(t),$$

welche der Integralgleichung (B_1.) genügt, sowohl in dem Kreise $|t| \leqq 1 - \varepsilon$ als auch in jedem im Endlichen gelegenen Gebiete des Sektors $|\arg t| \leqq \pi - \theta$ absolut und gleichmäßig konvergent.

Da die positive Größe ε beliebig klein angenommen werden kann, ist die analytische Funktion $w(t)$ in eine für $|t| < 1$ konvergente Potenzreihe

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

entwickelbar, die in § 2 bereits formal berechnet worden ist. Dabei ist

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

die der Differentialgleichung (A_1.) formal genügende Potenzreihe. Da die Reihe

$$\int_0^t w(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n t^n}{n!}$$

für $t = \frac{1}{1+\delta}$ konvergiert, wo δ eine beliebig kleine positive Größe ist, so ist

$$\frac{|C_n|}{n!\,(1+\delta)^n} \leqq A,$$

wo A eine von n unabhängige endliche positive Größe darstellt. Die Koeffizienten der Reihe S erfüllen also die Bedingung

$$|C_n| \leqq A\,n!\,(1+\delta)^n.$$

In dem Sektor $|\arg t| \leqq \pi - \theta$ ist

$$|w(t)| \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} |w_\nu(t)| \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{w}_\nu(t) \leqq \mathfrak{C}\,\sigma e^{\sigma t}$$

oder, wenn $\mathfrak{C}\,\sigma = K$ gesetzt wird,

$$|w(t)| \leqq K e^{\sigma |t|}.$$

Das Integral

$$\eta = \int_0^\infty w(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt,$$

erstreckt über die Gerade, welche von $t = 0$ mit $\arg t = \omega\,(|\omega| \leqq \pi - \theta)$ ins Unendliche geht, ist konvergent, wenn auf dem Integrationsweg

$$\lim_{t=\infty} w(t)\, e^{-\frac{t}{x}} = 0$$

ist. Wegen

$$\left| w(t)\, e^{-\frac{t}{x}} \right| \leqq K e^{\sigma|t|}\, e^{-|t|\,\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right)} = K e^{-|t|\left(\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) - \sigma\right)}$$

ist dies für

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \sigma$$

der Fall, d. h. im Innern des Kreises, der die Verbindungslinie der Punkte 0 und $\frac{e^{i\omega}}{\sigma}$ zum Durchmesser hat. Es ist

$$|w^2(t)| \leqq \int_0^{|t|} K e^{\sigma|\tau|} \cdot K e^{\sigma(|t| - |\tau|)}\, d|\tau| = K^2 e^{\sigma|t|} \cdot |t|$$

und weiter

$$|w^\mu(t)| \leqq K^\mu e^{\sigma|t|} \cdot \frac{|t|^{\mu-1}}{(\mu-1)!}.$$

Ferner ist

$$\left| \int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1} w^\mu(\tau)\, d\tau \right| \leqq \frac{K^\mu}{(\mu-1)!} \int_0^{|t|} e^{\sigma|\tau|} |\tau|^{\mu-1} (|t| - |\tau|)^{\lambda-1}\, d|\tau| = e^{\sigma t}\, g_{\lambda\mu}(|t|) - g_{\lambda\mu}(0),$$

wo $g_{\lambda\mu}(|t|)$ eine ganze Funktion $(\lambda + \mu - 2)$-ten Grades von $|t|$ darstellt. Der Grenzwert des Ausdrucks

$$e^{-\frac{t}{x}} \int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1} w^\mu(\tau)\, d\tau$$

für $\lim t = \infty$ verschwindet im Gebiet $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \sigma$, denn der absolute Betrag dieses Ausdrucks ist nicht größer als

$$e^{|t|\left(\sigma - \Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right)\right)} \left(g_{\lambda\mu}(|t|) - e^{-\sigma|t|}\, g_{\lambda\mu}(0)\right).$$

Es sind die Bedingungen (§ 1) dafür erfüllt, daß das über die Gerade $\arg t = \omega\,(|\omega| \leqq \pi - \theta)$ erstreckte Integral η in dem Gebiet $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \sigma$

der Differentialgleichung (A_1.) genügt. Dieses Gebiet und die zugehörigen Werte von η gehören, wenn σ hinreichend groß angenommen wird, dem Konvergenzbereich der Reihe $f(x, y)$ an.

Die bisherigen Ergebnisse fassen wir in den Satz zusammen:

Die nicht lineare Differentialgleichung

$$(A_1.) \qquad x^2 \frac{dy}{dx} + y = f(x, y),$$

wo

$$f(x, y) = \Sigma A_{\lambda\mu} x^\lambda y^\mu \qquad (\lambda = 1, \mu = 0; \lambda + \mu \geq 2)$$

in der Umgebung von $x = 0, y = 0$ *regulär ist, hat als Laplacesche Transformierte die nicht lineare Integralgleichung vom Volterraschen Typus*

$$(B_1.) \qquad (1 + t) w(t) = G_0(t) + \sum_{\mu=2}^{\infty} A_{0\mu} w^\mu(t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} G_\mu w^\mu(t);$$

dabei ist $w^\mu(t)$ *durch die Rekursionsformel*

$$w^\mu(t) = \int_0^t w(\tau) w^{\mu-1}(t - \tau) d\tau$$

definiert;

$$G_\mu(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{\lambda\mu} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda - 1)!} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist eine ganze transzendente Funktion von t *und*

$$G_\mu w^\mu(t) = \int_0^t G_\mu(t - \tau) w^\mu(\tau) d\tau.$$

Die Integralgleichung (B_1.) *besitzt eine Lösung* $w(t)$, *welche sich sowohl für* $|t| < 1$ *als auch für* $-\pi < \arg t < \pi$ *regulär verhält. Für* $|t| < 1$ *besteht die konvergente Reihenentwicklung*

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

während die im allgemeinen divergente Reihe

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

der Differentialgleichung (A_1.) *formal genügt. In dem Sektor* $|\arg t| \leqq \pi - \theta$ $(0 < \theta < \pi)$ *ist*

$$|w(t)| \leqq K e^{\sigma|t|},$$

wo K *und* σ *positive Konstante sind. Das über die Gerade* $\arg t = \omega$ $(-\pi < \omega < \pi)$ *erstreckte Laplacesche Integral*

$$\eta = \int_0^\infty w(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt$$

stellt in dem Kreise $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \sigma$ *eine Lösung der Differentialgleichung* (A_1.) *dar.*

§ 5.

In der Differentialgleichung (A.) sei jetzt $k > 1$. Wenn die Differentialgleichung durch die Reihe

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

formal befriedigt wird, genügt

$$z = y - \sum_{n=1}^{k-1} C_n x^n$$

einer Differentialgleichung, welche durch eine durch x^k teilbare Potenzreihe befriedigt wird. Wir können demnach $C_1 = 0, C_2 = 0, \ldots C_{k-1} = 0$ annehmen; die Differentialgleichung (A.), in welcher $A_{10} = 0, A_{20} = 0, \ldots A_{k-1,0} = 0$ ist, wird durch die Reihe

$$S = \sum_{n=k}^{\infty} C_n x^n$$

befriedigt.

Wenn

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{k}}$$

gesetzt wird, ist

$$\sum_{p=0}^{k-1} \alpha^{ph}$$

gleich k für $h = 0, \pm k, \pm 2k, \ldots$, gleich 0 für alle anderen positiven oder negativen ganzzahligen Werte von h.

Wir betrachten im folgenden k ausgezeichnete partikuläre Integrale η_m $(m = 0, 1, \ldots k-1)$ der Differentialgleichung (A.), und zwar wird η_m in einem dem Sektor

$$\frac{2m\pi - \frac{3\pi}{2}}{k} < \arg x < \frac{2m\pi + \frac{3\pi}{2}}{k}$$

angehörenden Gebiet definiert.

Wir nehmen an, daß x in dem Sektor

$$-\frac{3\pi}{2k} < \arg x < \frac{3\pi}{2k}$$

liegt, und beachten, daß die Funktion $\eta_m(\alpha^m x)$ der Gleichung

$$x^{k+1}\frac{d\eta_m(\alpha^m x)}{dx}+\eta_m(\alpha^m x)=\Sigma A_{\lambda\mu}(\alpha^m x)^\lambda(\eta_m(\alpha^m x))^\mu$$

genügt. Wir setzen

$$X=x^k,\ \mathsf{H}_p=\mathsf{H}_p(X)=\frac{1}{kx^p}\sum_{m=0}^{k-1}\alpha^{-mp}\eta_m(\alpha^m x), \qquad (p=0,1,\dots k-1)$$

so daß

$$\eta_m(\alpha^m x)=\sum_{p=0}^{k-1}(\alpha^m x)^p\,\mathsf{H}_p(X) \qquad (m=0,1,\dots k-1)$$

ist*). Es ist

$$kX^2\frac{d\mathsf{H}_p}{dX}+\mathsf{H}_p+pX\,\mathsf{H}_p=\frac{1}{kx^p}\sum_{m=0}^{k-1}\alpha^{-mp}\Sigma A_{\lambda\mu}(\alpha^m x)^\lambda\left[\sum_{q=0}^{k-1}(\alpha^m x)^q\,\mathsf{H}_q\right]^\mu.$$

Die zu $\mu=0$ gehörigen Glieder der rechten Seite sind

$$\frac{1}{k}\sum_{\lambda=k}^{\infty}A_{\lambda 0}x^{\lambda-p}\sum_{m=0}^{k-1}\alpha^{m(\lambda-p)}$$

oder, da $\sum_{m=0}^{k-1}\alpha^{m(\lambda-p)}$ nur für $\lambda=p+\nu k$ $(\nu=1,2,\dots)$ einen von Null verschiedenen Wert hat,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}A_{p+\nu k,0}\,x^{\nu k}=\sum_{\nu=1}^{\infty}A_{p+\nu k,0}X^\nu.$$

Zu $\mu=1$ gehören die Glieder

$$\frac{1}{k}\sum_{q=0}^{k-1}\mathsf{H}_q\sum_{m=0}^{k-1}\alpha^{m(\lambda+q-p)}\sum_{\lambda=1}^{\infty}A_{\lambda 1}x^{\lambda+q-p}$$

oder, da man sich auf $\lambda=p-q+\nu k$ beschränken kann,

$$\sum_{q=0}^{k-1}\mathsf{H}_q\sum_{\nu=0}^{\infty}A_{p-q+\nu k,1}X^\nu,$$

wobei im Falle $p-q<1$ mit $\nu=1$ zu beginnen ist. Für $\mu\geqq 2$ ist

$$\left[\sum_{q=0}^{k-1}(\alpha^m x)^q\,\mathsf{H}_q\right]^\mu$$

eine Summe von Gliedern

$$\mathsf{H}_{q_1}\cdots\mathsf{H}_{q_\mu}\alpha^{m(q_1+\cdots+q_\mu)}x^{q_1+\cdots+q_\mu},$$

wo $q_1,\dots q_\mu$ Zahlen aus der Reihe $0,1,\dots k-1$ sind. Auf der rechten Seite der Differentialgleichung für H_p stehen also Glieder

$$\mathsf{H}_{q_1}\cdots\mathsf{H}_{q_\mu}\cdot\frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\alpha^{m(\lambda+q_1+\cdots+q_\mu-p)}\cdot A_{\lambda\mu}x^{\lambda+q_1+\cdots+q_\mu-p}$$

$$=\mathsf{H}_{q_1}\cdots\mathsf{H}_{q_\mu}\sum_{\nu=0}^{\infty}A_{p-q_1-\cdots-q_\mu+\nu k,\mu}X^\nu,$$

wo A mit einem negativen ersten Index durch 0 zu ersetzen ist.

Demnach genügen die Funktionen H_p $(p=0,1,\dots k-1)$ von X den Differentialgleichungen

*) Vgl. Bd. 143, S. 229 ff.

$$kX^2\frac{d\mathsf{H}_p}{dX} = -\mathsf{H}_p - pX\mathsf{H}_p + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{p+\nu k,0}X^\nu + \sum_{q=0}^{k-1}\mathsf{H}_q\sum_{\nu=0}^{\infty}A_{p-q+\nu k,1}X^\nu + \cdots$$

oder

$$kX^2\frac{d\mathsf{H}_p}{dX} + \mathsf{H}_p = A_{p1}\mathsf{H}_0 + A_{p-1,1}\mathsf{H}_1 + \cdots + A_{11}\mathsf{H}_{p-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty}A_{p+\nu k,0}X^\nu - pX\mathsf{H}_p + \sum_{q=0}^{k-1}\mathsf{H}_q\sum_{\nu=1}^{\infty}A_{p-q+\nu k,1}X^\nu + \cdots.$$

Die Funktionen H_p bilden also eine partikuläre Lösung eines Systems von Differentialgleichungen von der Form

$$(\mathrm{A}_k.)\qquad kX^2\frac{dY_p}{dX} + Y_p = a_1Y_{p-1} + a_2Y_{p-2} + \cdots + a_pY_0 + \Sigma A^{(p)}_{\lambda,\mu_0,\mu_1\ldots}X^\lambda Y_0^{\mu_0}Y_1^{\mu_1}\ldots; \qquad (p=0,1,\ldots k-1)$$

$$(\lambda=1,\ \mu_0=\mu_1=\cdots=0;\ \lambda+\mu_0+\mu_1+\cdots\geq 2)$$

dabei ist

$$a_1 = A_{11},\ a_2 = A_{21},\ \ldots\ a_{k-1} = A_{k-1,1}.$$

§ 6.

Wir setzen

$$Y_p = \int_0^\infty w_p(t)e^{-\frac{t}{X}}dt \qquad (p=0,1,\ldots k-1)$$

mit demselben geradlinigen Integrationsweg wie in § 1. Dann ist

$$X^2\frac{dY_p}{dX} = \int_0^\infty t\,w_p(t)e^{-\frac{t}{X}}dt,$$

$$Y_0^{\mu_0}Y_1^{\mu_1}\ldots = \int_0^\infty w_0^{\mu_0}w_1^{\mu_1}\ldots(t)\,e^{-\frac{t}{X}}dt,$$

wo $w_0^{\mu_0}w_1^{\mu_1}\ldots(t)$ das in § 1 definierte symbolische Produkt ist, und

$$X^\lambda Y_0^{\mu_0}Y_1^{\mu_1}\ldots = \int_0^\infty\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}w_0^{\mu_0}w_1^{\mu_1}\ldots(\tau)\,d\tau\cdot e^{-\frac{t}{X}}dt$$

unter der Voraussetzung

$$\lim_{t=\infty}e^{-\frac{t}{X}}\int_0^t(t-\tau)^{\lambda'-1}w_0^{\mu_0}w_1^{\mu_1}\ldots(\tau)\,d\tau = 0. \qquad (\lambda'=1,2,\ldots\lambda)$$

Die *Laplace*schen Integrale für die Funktionen Y_p genügen den Differentialgleichungen $(\mathrm{A}_k.)$, wenn die Funktionen $w_p(t)$ dem folgenden System von *Volterra*schen Integralgleichungen genügen:

$$(1+kt)\,w_p(t) = a_1 w_{p-1}(t) + a_2 w_{p-2}(t) + \cdots + a_p w_0(t)$$
$$+ \sum_{\lambda=1}^{\infty} A^{(p)}_{\lambda,0,0,\ldots} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} + \sum_{\mu_0+\mu_1+\cdots\geq 2} A^{(p)}_{0,\mu_0,\mu_1,\ldots} w_0^{\mu_0} w_1^{\mu_1} \ldots (t)$$
$$+ \int_0^t \sum_{\mu_0+\mu_1+\cdots\geq 1} \sum_{\lambda=1}^{\infty} A^{(p)}_{\lambda,\mu_0,\mu_1,\ldots} \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} w_0^{\mu_0} w_1^{\mu_1} \ldots (\tau)\, d\tau. \qquad (p=0,1,\ldots k-1)$$

Wenn die Reihe $\Sigma A_{\lambda\mu} x^\lambda y^\mu$ für $x=\frac{1}{h}$, $y=\frac{1}{h'}$ konvergiert, ist die Reihe $\Sigma A^{(p)}_{\lambda,\mu_0,\mu_1,\ldots} X^\lambda Y_0^{\mu_0} Y_1^{\mu_1}, \ldots$ für $X=\frac{1}{h}$, $Y_0=\frac{1}{kh'}$, $Y_1=\frac{1}{kh'}, \ldots$ konvergent, so daß

$$|A^{(p)}_{\lambda,\mu_0,\mu_1,\ldots}| \leqq G h^\lambda (kh')^{\mu_0+\mu_1+\cdots}$$

ist, wo G eine positive Größe darstellt. Demnach ist

$$G^{(p)}_{\mu_0,\mu_1,\ldots}(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} A^{(p)}_{\lambda,\mu_0,\mu_1,\ldots} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

eine ganze transzendente Funktion von t, und es ist

$$|G^{(p)}_{\mu_0,\mu_1,\ldots}(t)| \leqq Gh(kh')^{\mu_0+\mu_1+\cdots} e^{h|t|}.$$

Wir schreiben

$$G^{(p)}_{\mu_0,\mu_1,\ldots} w_0^{\mu_0} w_1^{\mu_1} \ldots (t) = \int_0^t G^{(p)}_{\mu_0,\mu_1,\ldots}(t-\tau) \cdot w_0^{\mu_0} w_1^{\mu_1} \ldots (\tau)\, dt,$$

so daß die obigen Integralgleichungen die Form annehmen:

$$(B_k.) \quad (1+kt)\,w_p(t) = a_1 w_{p-1}(t) + a_2 w_{p-2}(t) + \cdots + a_p w_0(t)$$
$$+ G^{(p)}_{0,0,\ldots}(t) + \sum_{\mu_0+\mu_1+\cdots\geq 2} A^{(p)}_{0,\mu_0,\mu_1,\ldots} w_0^{\mu_0} w_1^{\mu_1} \ldots (t)$$
$$+ \sum_{\mu_0+\mu_1+\cdots\geq 1} G^{(p)}_{\mu_0,\mu_1,\ldots} w_0^{\mu_0} w_1^{\mu_1} \ldots (t). \qquad (p=0,1,\ldots k-1)$$

Wenn die Differentialgleichungen $(A_k.)$ durch die Reihen

$$Y_p = \sum_{n=1}^{\infty} C_{pn} X^n \qquad (p=0,1,\ldots k-1)$$

formal befriedigt werden, werden die Integralgleichungen $(B_k.)$, wie aus § 2 folgt, durch die Reihen

$$w_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{pn} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (p=0,1,\ldots k-1)$$

befriedigt. Nach Bd. 143, S. 229—230 ist

$$C_{pn} = C_{p+nk}. \qquad (n=1,2,\ldots)$$

§ 7.

Wir beschränken t entweder auf den Kreis

$$|t| \leqq \frac{1-\varepsilon}{k} \qquad (0<\varepsilon<1)$$

oder auf den Sektor

$$|\arg t| \leqq \pi - \theta \qquad (0 < \theta < \pi);$$

dann ist

$$|1 + kt| \geqq \varepsilon, \quad |1 + kt| \geqq \sin\theta.$$

Wir wählen die positiven Größen $\mathfrak{a}_p$ und $\mathfrak{A}^{(p)}_{\lambda,\mu_0,\mu_1,\dots}$ so, daß

$$\frac{|a_p|}{\varepsilon} \leqq \mathfrak{a}_p, \quad \frac{|a_p|}{\sin\theta} \leqq \mathfrak{a}_p,$$

$$\frac{|A^{(p)}_{\lambda,\mu_0,\mu_1,\dots}|}{\varepsilon} \leqq \mathfrak{A}^{(p)}_{\lambda,\mu_0,\mu_1,\dots}, \quad \frac{|A^{(p)}_{\lambda,\mu_0,\mu_1,\dots}|}{\sin\theta} \leqq \mathfrak{A}^{(p)}_{\lambda,\mu_0,\mu_1,\dots}, \quad |\mathfrak{A}^{(p)}_{\lambda,\mu_0,\mu_1,\dots}| \leqq \mathfrak{G}\, h^{\lambda}(kh')^{\mu_0+\mu_1+\cdots}$$

ist. Wenn unter Einführung der positiven reellen Veränderlichen t

$$\mathfrak{G}^{(p)}_{\mu_0,\mu_1,\dots}(\mathfrak{t}) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \mathfrak{A}^{(p)}_{\lambda,\mu_0,\mu_1,\dots} \frac{\mathfrak{t}^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

gesetzt wird, ist

$$|G^{(p)}_{\mu_0,\mu_1,\dots}(t)| \leqq \varepsilon\, \mathfrak{G}^{(p)}_{\mu_0,\mu_1,\dots}(|t|), \qquad |G^{(p)}_{\mu_0,\mu_1,\dots}(t)| \leqq \sin\theta \cdot \mathfrak{G}^{(p)}_{\mu_0,\mu_1,\dots}(|t|),$$

$$\mathfrak{G}^{(p)}_{\mu_0,\mu_1,\dots}(\mathfrak{t}) \leqq \mathfrak{G}\, h\,(kh')^{\mu_0+\mu_1+\cdots} e^{h\mathfrak{t}}.$$

Wir nehmen die Integralgleichungen

$$(\mathfrak{B}_{k\cdot}) \qquad \mathfrak{w}_p(\mathfrak{t}) = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{w}_{p-1}(\mathfrak{t}) + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{w}_{p-2}(\mathfrak{t}) + \cdots + \mathfrak{a}_p \mathfrak{w}_0(\mathfrak{t})$$

$$+ \mathfrak{G}^{(p)}_{0,0\dots}(\mathfrak{t}) + \sum_{\mu_0+\mu_1+\cdots \geq 2} \mathfrak{A}^{(p)}_{0,\mu_0,\mu_1,\dots} \mathfrak{w}_0^{\mu_0} \mathfrak{w}_1^{\mu_1} \dots (\mathfrak{t}) + \sum_{\mu_0+\mu_1+\cdots \geq 1} \mathfrak{G}^{(p)}_{\mu_0,\mu_1,\dots} \mathfrak{w}_0^{\mu_0} \mathfrak{w}_1^{\mu_1} \dots (\mathfrak{t})$$

zu Hilfe, welche durch die *Laplace*sche Transformation aus den Gleichungen

$$(\mathfrak{A}_{k\cdot}) \quad \mathfrak{Y}_p = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{Y}_{p-1} + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{Y}_{p-2} + \cdots + \mathfrak{a}_p \mathfrak{Y}_0 + \sum \mathfrak{A}^{(p)}_{\lambda,\mu_0,\mu_1,\dots} \mathfrak{X}^{\lambda} \mathfrak{Y}_0^{\mu_0} \mathfrak{Y}_1^{\mu_1} \dots$$
$$(\lambda = 1, \mu_0 = \mu_1 = \cdots = 0;\ \lambda + \mu_0 + \mu_1 + \cdots \geq 2)$$

hervorgehen. Die Gleichungen $(\mathfrak{A}_{k\cdot})$ werden durch Potenzreihen

$$\mathfrak{Y}_p = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}_{pn} \mathfrak{X}^n$$

mit positiven Koeffizienten befriedigt, welche für $|\mathfrak{X}| \leqq \frac{1}{\sigma}$ konvergieren, wo $\sigma > 0$ und endlich ist. Dann genügen die beständig konvergenten Potenzreihen

$$\mathfrak{w}_p(\mathfrak{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}_{pn} \frac{\mathfrak{t}^{n-1}}{(n-1)!}$$

den Integralgleichungen $(\mathfrak{B}_{k\cdot})$. Wegen

$$\mathfrak{C}_{pn} \leqq \mathfrak{C}\, \sigma^n,$$

wo $\mathfrak{C}$ eine endliche positive Größe ist, ist

$$\mathfrak{w}_p(\mathfrak{t}) \leqq \mathfrak{C}\, \sigma\, e^{\sigma \mathfrak{t}}.$$

Die Integralgleichungen, welche aus $(\mathfrak{B}_{k\cdot})$ dadurch hervorgehen, daß man $\mathfrak{A}^{(p)}_{\lambda,\mu_0,\mu_1,\dots}$ mit $\alpha^{\mu_0+\mu_1+\cdots}$ multipliziert, haben die Lösung

$$\mathfrak{w}_p(\mathfrak{t}) = \mathfrak{w}_{p0}(\mathfrak{t}) + \alpha\, \mathfrak{w}_{p1}(\mathfrak{t}) + \alpha^2 \mathfrak{w}_{p2}(\mathfrak{t}) + \cdots;$$

dabei ist

$$\mathfrak{w}_{p0}(t) = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{w}_{p-1,0}(t) + \cdots + \mathfrak{a}_p \mathfrak{w}_{00}(t) + \mathfrak{G}^{(p)}_{0,0,\ldots}(t),$$
$$\mathfrak{w}_{p1}(t) = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{w}_{p-1,1}(t) + \cdots + \mathfrak{a}_p \mathfrak{w}_{01}(t) + \mathfrak{G}^{(p)}_{1,0,\ldots}\mathfrak{w}_{00}(t) + \mathfrak{G}^{(p)}_{0,1,\ldots}\mathfrak{w}_{10}(t) + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots

sind in dem Gebiet $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{X}\right) > \sigma$ konvergent und genügen den Differentialgleichungen $(A_k.)$. Der zu $\omega = 0$ gehörigen Kreisfläche $\Re\left(\frac{1}{X}\right) > \sigma$ entsprechen zufolge der Gleichung $x^k = X$ in der Ebene der Veränderlichen $x = \varrho e^{i\vartheta}$ k von den Bögen einer Sinusspirale (für $k = 2$ einer Lemniskate) begrenzte Flächenstücke, welche der Ungleichung

$$\varrho^k < \frac{\cos k\vartheta}{\sigma}$$

genügen. Wenn wir x auf das Gebiet

$$\varrho^k < \frac{\cos k\vartheta}{\sigma} \qquad \left(-\frac{\pi}{2k} \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2k}\right)$$

beschränken, definieren die Gleichungen

$$\eta_m(\alpha^m x) = \sum_{p=0}^{k-1} (\alpha^m x)^p \mathsf{H}_p(x^k),$$

wobei als Integrationsweg von H_p zunächst die reelle positive Achse der t-Ebene genommen wird, m Integrale der Differentialgleichung (A.). Wird über die Gerade $\arg t = \omega$ $(-\pi < \omega < \pi)$ integriert, so ist durch die obige Gleichung $\eta_m(\alpha^m x)$ in dem Gebiet

$$\varrho^k < \frac{\cos(k\vartheta - \omega)}{\sigma} \qquad \left(-\frac{\pi}{2k} + \frac{\omega}{k} \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2k} + \frac{\omega}{k},\ -\pi < \omega < \pi\right)$$

definiert, welches dem Sektor

$$-\frac{3\pi}{2k} < \arg x < \frac{3\pi}{2k}$$

angehört. Ersetzt man $\alpha^m x$ durch x, so wird durch die Gleichung

$$\eta_m = \sum_{p=0}^{k-1} x^p \int_0^\infty w_p(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt \qquad (m = 0, 1, \ldots k-1)$$

ein Integral der Differentialgleichung (A.) in einem Gebiet dargestellt, welches in dem Sektor

$$\frac{2m\pi - \frac{3\pi}{2}}{k} < \arg x < \frac{2m\pi + \frac{3\pi}{2}}{k}$$

liegt.

Wir können den Satz aussprechen:

Aus der Differentialgleichung

(A.) $$x^{k+1}\frac{dy}{dx} + y = f(x, y),$$

wo $f(x,y)$ in der Umgebung von $x=0$, $y=0$ regulär ist und $f(x,0)$ durch x^k teilbar vorausgesetzt werden kann, entsteht durch die abgeänderte Laplacesche Transformation das System von nicht linearen Volterraschen Integralgleichungen (§ 6)

$$(B_k.)\quad (1+kt)w_p(t) = a_1 w_{p-1}(t) + a_2 w_{p-2}(t) + \cdots + a_p w_0(t)$$
$$+ G^{(p)}_{0,0,\ldots}(t) + \sum_{\mu_0+\mu_1+\cdots \geq 2} A^{(p)}_{0,\mu_0,\mu_1,\ldots} w_0^{\mu_0} w_1^{\mu_1} \ldots (t) + \sum_{\mu_0+\mu_1+\cdots \geq 1} G^{(p)}_{\mu_0,\mu_1,\ldots} w_0^{\mu_0} w_1^{\mu_1} \ldots (t), \qquad (p=0,1,\ldots k-1)$$

welches eine Lösung $w_p(t)$ besitzt, die sich sowohl für $|t| < \frac{1}{k}$ als auch für $-\pi < \arg t < \pi$ regulär verhält. Für $|t| < \frac{1}{k}$ besteht die konvergente Reihenentwicklung

$$w_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{p+nk} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

während

$$S = \sum_{n=k}^{\infty} C_n x^n$$

die der Differentialgleichung (A.) *formal genügende (im allgemeinen divergente) Reihe ist. In dem Sektor $|\arg t| \leqq \pi - \theta$ $(0 < \theta < \pi)$ ist*

$$|w_p(t)| \leqq K e^{\sigma |t|},$$

wo K und σ positive Konstante sind. Die Differentialgleichung (A.) *hat die m ausgezeichneten Integrale*

$$\eta_m = \sum_{p=0}^{k-1} x^p \int_0^{\infty} w_p(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}} dt; \qquad (m=0,1,\ldots k-1)$$

dabei wird über die Gerade $\arg t = \omega$ $(-\pi < \omega < \pi)$ integriert, und x gehört dem in dem Sektor

$$\frac{2m\pi - \frac{3\pi}{2}}{k} < \arg x < \frac{2m\pi + \frac{3\pi}{2}}{k}$$

gelegenen Gebiet $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) > \sigma$ an.

§ 8.

Auf die weitere Untersuchung des Integrals η der Differentialgleichung $(A_1.)$ und der k Integrale $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_{k-1}$ der Differentialgleichung (A.), sowie der übrigen Integrale, welche sich für $\lim x = 0$ der Null nähern, soll in einem späteren Aufsatze eingegangen werden. Hier beschränken wir uns auf einige Bemerkungen.

Nach der für lineare Differentialgleichungen bekannten Methode*) ergibt sich, daß das Integral η der Differentialgleichung $(A_1.)$ in dem Sektor $-\frac{3\pi}{2}+\delta \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2}-\delta$, wo δ eine beliebig kleine positive Zahl ist, durch die Reihe S gleichmäßig asymptotisch dargestellt wird. Aus dem *Laplace*schen Integral ergibt sich die Entwicklung der Funktion η in eine konvergente Fakultätenreihe**).

Für die in §§ 4—7 vorkommenden Funktionen H_p von X lassen sich konvergente Fakultätenreihen aufstellen. Ferner ergibt sich, daß H_p in dem Sektor $-\frac{3\pi}{2}+\delta \leqq \arg X \leqq \frac{3\pi}{2}-\delta$, wo δ eine beliebig kleine positive Zahl ist, durch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{p+nk} X^n$$

gleichmäßig asymptotisch dargestellt wird. Daraus folgt die asymptotische Darstellung des Integrals $\eta_m(x)$ $(m = 0, 1, \ldots k-1)$ der Differentialgleichung (A.) durch die Potenzreihe S in dem Sektor

$$\frac{2m\pi-\frac{3\pi}{2}+\delta}{k} \leqq \arg x \leqq \frac{2m\pi+\frac{3\pi}{2}-\delta}{k}.$$

Die Integrale η_m und ihre asymptotische Darstellung erhält man auch, wenn man die Methode sukzessiver Annäherungen für komplexe x benutzt.

Die unendlich vielen Integrale der Differentialgleichung (A.), welche in dem Sektor

$$\frac{2m\pi+\frac{\pi}{2}+\delta}{k} \leqq \arg x \leqq \frac{2m\pi+\frac{3\pi}{2}-\delta}{k}$$

durch die Reihe S asymptotisch dargestellt werden, sollen später genauer untersucht werden***).

---

*) Math. Ann., Bd. 49, S. 454—464 und Bd. 50, S. 527—531.

**) Vgl. Math. Ann., Bd. 71, S. 510ff., sowie *Watson*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, Bd. 34, S. 41ff.

***) Vgl. Bd. 119, S. 278ff.

Über die Existenztheoreme der Potential- und Funktionentheorie.

Von Herrn *R. Courant* in Göttingen.

Die von *Riemann* so erfolgreich verwendete Idee des *Dirichletschen Prinzipes* kann, wie *Hilbert* zuerst gezeigt hat, zum Ausgangspunkt eines strengen Beweisverfahrens gemacht werden; doch lassen die *Hilbert*schen Ausführungen und die meisten an *Hilbert* anschließenden Arbeiten*) teils an Einfachheit zu wünschen übrig, teils beziehen sie sich nicht unmittelbar auf alle hier in Frage kommenden Probleme, d. h. die *Randwertaufgabe der Potentialtheorie*, die Frage nach der Existenz von *Funktionen auf gegebenen Riemannschen Flächen*, etwa der *Abelschen Integrale* oder der *uniformisierenden Variabelen vom Grenzkreis- oder Schottky-Typus*, die Frage nach der *Existenz von automorphen Funktionen zu gegebener Gruppe.* Es ist daher vielleicht nicht ohne Interesse, wenn ich in den folgenden Zeilen ein Beweisverfahren darlege**), das von demselben Ausgangspunkte aus

*) Von diesen sei hier lediglich auf die Arbeit von *Lebesgue*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. 24, hingewiesen, mit der die vorliegende gewisse Berührungspunkte besitzt. Für geschlossene *Riemann*sche Flächen hat *H. Weyl* in seinem Buche: „Die Idee der *Riemann*schen Fläche", Leipzig 1913, eine sehr elegante und einfache Darstellung der Existenzbeweise auf Grund einer Idee von *Zaremba* gegeben. Im übrigen vgl. das Literaturverzeichnis bei *Hilbert:* „Zur Theorie der konformen Abbildung", Gött. Nachr. 1909.

**) Dieses Verfahren stellt eine wesentliche, gelegentlich einer Vorlesung entstandene Vereinfachung und Erweiterung der Methode dar, die ich in einer Abhandlung: „Über die Methode des *Dirichlet*schen Prinzipes", Math. Annalen, Bd. 72, entwickelt habe. — Gegen die Anwendung des Wortes „*Dirichlet*sches Prinzip" sind Bedenken geäußert worden, die in der schon von *Prym*, *Schwarz*, *Hadamard* gemachten Bemerkung ihre Rechtfertigung finden, daß das *Dirichlet*sche Variationsproblem unter Umständen keinen Sinn haben kann; vgl. § 1 meiner zitierten Annalenarbeit.

alle in Frage stehenden Probleme mit einem Schlage erledigt und, wie mir scheint, nicht nur die wünschenswerte Einfachheit und Einheitlichkeit besitzt, sondern auch in mancher Beziehung weitergehende Resultate liefert*) als die sonst üblichen Methoden.

Nach einigen Vorbemerkungen in Kapitel I werde ich in Kapitel II die *Randwertaufgabe der Potentialtheorie* für die Ebene behandeln. Diese Aufgabe wird gelöst für einen schlichten *Bereich denkbar allgemeinster Natur;* insbesondere darf sein Zusammenhang unendlich sein, seine Begrenzung aus beliebigen *Jordan*schen Kurven oder noch allgemeineren Punktmengen bestehen. Gleichzeitig erhalten wir genaueren Aufschluß über das Verhalten der Potentialfunktion bei Annäherung an den Rand. Alle Betrachtungen dieses Abschnittes lassen sich unverändert auf das entsprechende Problem für drei oder mehr Dimensionen übertragen.

In Kapitel III wird gezeigt, daß die Methode ebenso die Beweise aller übrigen in Frage kommenden Existenztheoreme liefert. In Kapitel IV, dessen Verständnis von den beiden vorangehenden unabhängig ist, werde ich von einer elementaren, in dem Beweisverfahren dominierenden Ungleichung eine *Anwendung auf die Theorie der konformen Abbildung* machen, indem ich einen kurzen Beweis für den *Carathéodory-Osgoodschen Satz von der Ränderzuordnung bei konformer Abbildung* gebe. Die hier gegebenen Existenzbeweise liefern gleichzeitig ein *Verfahren zur numerischen Bestimmung* der fraglichen Funktionen**).

Wir werden uns in den folgenden drei Abschnitten auf den Standpunkt stellen, daß wir die Lösung der Randwertaufgabe der Potentialtheorie für Kreis und Rechteck beherrschen, d. h. daß wir eine im Inneren eines beliebigen Kreises oder Rechteckes reguläre Potentialfunktion konstruieren können, die am Rande vorgeschriebene, von der Bogenlänge stetig abhängende Werte annimmt. In der Tat gehört die Lösung dieser Aufgaben den Elementen an. — Desgleichen werden wir gelegentlich von der noch elementareren Tatsache aus der Potentialtheorie Gebrauch machen, daß man eine Potentialfunktion konstruieren kann, die in einem Rechteck regulär ist, auf zwei gegenüberliegenden Seiten vorgeschriebene stetige Werte und auf den beiden anderen verschwindende normale Ableitungen besitzt.

*) Vgl. etwa II, 6.

**) Vgl. die zweite Anm. auf S. 197.

I. Vorbemerkungen.

1. Definitionen. Seien $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ unendlich viele Bereiche, deren jeder ganz im folgenden liegt und von endlich vielen, im Endlichen gelegenen, stückweise analytischen Kurven begrenzt wird. Dann bezeichnen wir mit $\Omega = \lim_{n=\infty} \Omega_n$ den Bereich, der aus allen einem der Ω_n angehörenden Punkten besteht. Unter dem Integral einer Funktion, erstreckt über Ω, verstehen wir den Limes der entsprechenden über Ω_n erstreckten Integrale bei wachsendem n, wenn dieser Limes existiert.

Sei Ω ein solcher in der x-y-Ebene gelegener schlichter Bereich, $\varphi(x, y)$ eine in Ω stetige und mit stetigen ersten Ableitungen versehene Funktion. Dann heißt das über Ω erstreckte Doppelintegral

$$(1.) \qquad D[\varphi] = \iint_{(\Omega)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy,$$

wenn es existiert, das *Dirichlet*sche Integral von φ für Ω. Ist ψ eine zweite denselben Bedingungen wie φ unterworfene Funktion, so heißt das Integral

$$(2.) \qquad D[\varphi, \psi] = \iint_{(\Omega)} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} dx\, dy,$$

wenn es existiert, das polarisierte *Dirichlet*sche Integral der Funktionen φ und ψ. Es gilt offenbar die Identität

$$(3.) \qquad D[\varphi + \psi] = D[\varphi] + 2\, D[\varphi, \psi] + D[\psi]$$

und die aus der Definitheit des in λ quadratischen Polynoms $D[\varphi + \lambda\psi]$ folgende Ungleichung

$$(4.) \qquad (D[\varphi, \psi])^2 \leqq D[\varphi] \cdot D[\psi],$$

die Existenz der betreffenden Integrale vorausgesetzt. Alle diese Definitionen und Relationen bleiben bestehen, wenn wir über die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen von φ und ψ an abzählbar vielen — in jedem ganz im Inneren von Ω liegenden Teilgebiete jedoch nur in endlicher Anzahl vorhandenen — analytischen Kurvenstücken nichts voraussetzen. Solche Funktionen sollen in Ω stetig und stückweise stetig differenzierbar heißen.

2. Hilfssätze. Hilfssatz I. *Sei $\varphi(x, y)$ eine in dem schlichten Bereich Ω stetige, stückweise stetig differenzierbare Funktion, deren Dirichletsches Integral $D[\varphi]$ über Ω existiert. Es möge ferner der durch die Ungleichungen*

$x_0 \leqq x \leqq x_1$ definierte Parallelstreifen der Breite $x_1 - x_0$ das Gebiet Ω durchschneiden). Dann gibt es einen Wert x' in dem betrachteten Intervall derart, daß das einfache über die Parallele $x = x'$ zur y-Achse, soweit diese in Ω fällt, erstreckte Integral*

$$\int_{(x=x')} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} \right)^2 \right\} dy$$

existiert und kleiner als $\frac{D[\varphi]}{x_1 - x_0}$ ist.

Entsprechendes gilt für Parallelstreifen zur x-Achse.

Der Beweis folgt unmittelbar, wenn wir das Doppelintegral als Sukzession zweier einfacher Integrale — erst nach y, dann nach x — auffassen.

Hilfssatz II. *Seien $p_1(x, y), p_2(x, y), \ldots$ unendlich viele in dem achsenparallelen Rechtecke R reguläre Potentialfunktionen derart, daß ihre über R erstreckten Dirichletschen Integrale $D[p_n]$ mit wachsendem n gegen Null konvergieren; wenn dann die Werte von p_n in einem inneren Punkte P von R einen Grenzwert c besitzen, so konvergieren die Funktionen p_n überall in R gegen c, und zwar gleichmäßig für jedes im Inneren von R gelegene Gebiet.*

Zum Beweise beachten wir, daß eine einfache Anwendung der bekannten *Schwarz*schen Ungleichung für eine stetig differenzierbare Funktion $f(x, y)$ sofort aus der Beziehung

$$f(x_2, y) - f(x_1, y) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx$$

die Ungleichung

$$(5.) \qquad |f(x_2, y) - f(x_1, y)|^2 \leqq (x_2 - x_1) \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right\} dx$$

liefert, und daß eine entsprechende Ungleichung auch für die Schwankung von f auf einer Parallelen zur x-Achse gilt. Wir ziehen nun zu den Rechteckseiten mit dem hinreichend klein gewählten Abstand δ die vier das Innere von R durchsetzenden Parallelen, so daß R in einen rechteckigen Rahmen von der Breite δ und ein darin liegendes kleineres Rechteck R' zerlegt wird, wobei P in R' liegt. Wenden wir nun Hilfssatz I auf die Funktion p_n und die vier den Rahmen definierenden Parallelstreifen der Breite δ an, so ergibt sich wegen (5.), da $\frac{D[p_n]}{\delta}$ mit wachsendem n gegen Null konvergiert, und da die Schwankung einer Potential-

*) d. h. es gebe zu jedem x dieses Intervalles Punkte in Ω mit der Abszisse x.

funktion im Inneren eines Gebietes die auf dem Rande nicht übersteigen kann, daß die Schwankung von p_n in R' mit wachsendem n gleichmäßig gegen Null konvergiert. Wegen der Konvergenz der p_n im Mittelpunkte und der Willkürlichkeit von δ ist somit der Hilfssatz bewiesen. —

Als letzten Punkt dieses Abschnittes haben wir noch das Verhalten des *Dirichlet*schen Integrales einer Potentialfunktion u über ein Rechteck zu erörtern. Ist diese Funktion auf dem Rande des Rechteckes noch regulär, so folgt in bekannter Weise durch Anwendung der *Green*schen Formel, daß u dem *Dirichlet*schen Integrale einen kleineren Wert erteilt als jede andere im Rechteck stetige, stückweise stetig differenzierbare Funktion mit denselben Randwerten. Besitzt jedoch u lediglich stetige Randwerte, ohne noch am Rande regulär zu sein, so hört diese Minimumseigenschaft im allgemeinen auf, da, wie *Prym*, *Hadamard* u. a. bemerkt haben, trotz der Stetigkeit der Randwerte das *Dirichlet*sche Integral von u unendlich werden kann. Doch gilt hier folgende für uns wichtige*) Tatsache:

Hilfssatz III. *Ist φ eine im Rechteck R einschließlich des Randes stetige, im Inneren stetig differenzierbare Funktion mit endlichem Dirichletschen Integral $D[\varphi]$, so existiert auch das Dirichletsche Integral $D[u]$ der in R regulären, zu denselben Randwerten wie φ gehörigen Potentialfunktion, und es ist $D[u] \leqq D[\varphi]$.*

Zusatz: *Die Voraussetzung über die Ableitungen von φ darf für endlich viele Parallelen zu den Rechteckseiten aufgegeben werden, ohne daß der Hilfssatz seine Gültigkeit verliert.*

Der Beweis**) dieser Tatsache kann etwa folgendermaßen geführt werden. Sei φ zunächst in R einschließlich des Randes stetig differen-

---

*) Eine leichte Modifikation des Beweisverfahrens von II macht allerdings die Benutzung dieses Hilfssatzes ganz entbehrlich und gestattet so eine Abkürzung des Beweises; vgl. die erste Anm. auf S. 197; doch schien mir die im Text gegebene Beweisanordnung aus prinzipiellen Gründen den Vorzug zu verdienen.

**) In der Literatur finden sich verschiedene Beweise des Hilfssatzes, die alle spezielle Ausdrücke für u benutzen; vgl. etwa *Hadamard*, Bull. Soc. Math. de France, 34 (1906), p. 135—139, *Zaremba*, Bull. de l'Académie de Cracovie, 1909, p. 206 ff., *Courant*, a. a. O.; der hier gegebene Beweis benutzt solche Ausdrücke nicht und ist daher nicht nur für Rechtecke, sondern für beliebige Gebiete anwendbar.

zierbar; dann können wir φ durch Polynome $\varrho_n(x, y)$ derart approximieren, daß auch die ersten Ableitungen von φ durch die von ϱ_n überall in R gleichmäßig approximiert werden. Also ist auch $\lim_{n=\infty} D[\varrho_n] = D[\varphi]$. Andererseits ist, wenn wir unter u_n die in R reguläre, auf dem Rande von R mit ϱ_n übereinstimmende Potentialfunktion verstehen, $D[u_n] \leqq D[\varrho_n]$; denn u_n ist auf dem Rande noch regulär und gestattet daher die Anwendung des *Green*schen Satzes. Da aber u_n und die Ableitungen von u_n überall in R gegen u und die Ableitungen von u konvergieren, und zwar gleichmäßig für jedes im Inneren von R liegende Gebiet, so folgt sofort $D[u] \leqq \lim_{n=\infty} \sup D[u_n] \leqq D[\varphi]$, wie bewiesen werden sollte. Ist φ nur im Inneren, nicht mehr einschließlich des Randes mit stetigen ersten Ableitungen versehen, so wenden wir die obige Betrachtung auf das in R gelegene Rechteck R_ε an, dessen Seiten von denen von R den Abstand ε besitzen; ist $u_\varepsilon(x, y)$ die in R_ε reguläre, auf dem Rande von R_ε mit φ übereinstimmende Potentialfunktion, so folgt $D_\varepsilon[u_\varepsilon] \leqq D_\varepsilon[\varphi]$, wenn unter D_ε das über R_ε erstreckte *Dirichlet*sche Integral verstanden wird. Wegen der Konvergenz von u_ε und den Ableitungen von u_ε gegen u und die Ableitungen von u folgt hieraus wie oben die behauptete Relation $D[u] \leqq D[\varphi]$. — Der Beweis ist hiermit gleichzeitig auch für den Fall erbracht, daß es eine oder mehrere Geraden in R gibt, bei deren Überschreiten die Ableitungen von φ endliche Sprünge erleiden, so, daß diese Ableitungen von beiden Seiten der Geraden her bestimmte, nicht notwendig gleiche Grenzwerte besitzen. Denn offenbar läßt sich eine solche Funktion derartig durch eine andere φ_1 mit in R stetigen Ableitungen approximieren, daß das *Dirichlet*sche Integral von φ_1 das von φ beliebig genau approximiert.

Um endlich die in dem Zusatze ausgesprochene Erweiterung des Hilfssatzes zu beweisen, genügt es etwa anzunehmen, daß durch die Gerade $x = 0$ das Rechteck R in zwei Rechtecke R_1 und R_2 zerlegt wird, für die beide φ die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt. Indem wir φ in R_1 und R_2 durch die entsprechenden Potentialfunktionen ersetzen, verkleinern wir, dem obigen zufolge, den Wert des *Dirichlet*schen Integrales; wir können daher von vornherein voraussetzen, daß φ eine in R_1 und R_2 reguläre Potentialfunktion ist. Nunmehr ziehen wir beiderseits zu $x = 0$ im Abstande ε Parallelen g_1, g_2 und zerteilen so R in drei Rechtecke R_1', R_2' und R_3, wobei

R_3 die Breite 2ε besitzt. Ersetzen wir jetzt φ durch eine Funktion φ_ε, die in R_1' und R_2', auf g_1 und g_2 mit φ übereinstimmt, in R_3 eine reguläre Potentialfunktion ist, und deren normale Ableitungen auf den beiden schmalen Seiten von R_3 verschwinden, so wird jedenfalls $D[\varphi_\varepsilon] \leqq D[\varphi]$, wie die hier mögliche Anwendung des *Green*schen Satzes ergibt. Da für die auf dem Rande von R mit φ_ε übereinstimmende, in R reguläre Potentialfunktion u_ε den voranstehenden Überlegungen zufolge $D[u_\varepsilon] \leqq D[\varphi_\varepsilon]$ gilt, und da u_ε mit abnehmendem ε gegen u konvergiert, — und zwar, wie oben, gleichmäßig nebst Ableitungen in jedem im Inneren von R liegenden Gebiet — so folgt $D[u] \leqq D[\varphi]$, und der Zusatz ist somit bewiesen.

II. Die Randwertaufgabe der Potentialtheorie.

1. Formulierung des Problemes. Es sei Ω ein beliebiger ganz im Endlichen der x-y-Ebene gelegener schlichter Bereich, wie er in Abschnitt I, 1 definiert wurde. Um unnütze, den Gedankengang verschleiernde Allgemeinheit zu vermeiden, wollen wir zunächst voraussetzen, daß Ω einfach zusammenhängend ist und etwa von einer *Jordan*schen Kurve begrenzt werde. Wir werden dann am Schlusse dieses Abschnittes leicht erkennen, daß diese Voraussetzungen völlig entbehrlich sind. Es sei $f(x,y)$ eine in Ω einschließlich der Randpunkte stetige Funktion von x und y. Dann ist das Problem, zu entscheiden, ob es stets eine in Ω reguläre Potentialfunktion $u(x, y)$ gibt, die sich bei Annäherung des Punktes (x, y) an den Rand denselben Werten nähert wie $f(x, y)$. Wir machen ferner die Voraussetzung, daß $f(x, y)$ in Ω stückweise zweimal stetig differenzierbar ist mit der Beschränkung, daß die Unterbrechung der Stetigkeit der Ableitungen lediglich auf Parallelen zu den Koordinatenachsen stattfinden darf, und daß das *Dirichlet*sche Integral $D[f]$ von $f(x, y)$ über Ω existiert. Diese Voraussetzungen sind z. B. stets erfüllt, wenn f eine in einem Ω enthaltenden Gebiet analytische Funktion, etwa ein Polynom, ist. Unter diesen Voraussetzungen hat das folgende Variationsproblem einen Sinn: *Unter allen Funktionen, die in Ω stetig und stückweise zweimal stetig differenzierbar sind derart, daß eine Unterbrechung der Stetigkeit der Ableitungen nur auf Parallelen zu den Koordinatenachsen eintreten darf, und die ferner dieselben Randwerte wie $f(x, y)$ besitzen, ist diejenige*

*u gesucht, für welche das Dirichletsche Integral $D[u]$ ein Minimum wird**).

Wir werden zeigen, daß dieses Problem eine Lösung u besitzt, und daß diese Lösung eine überall in Ω reguläre Potentialfunktion und somit die Lösung der Randwertaufgabe ist.

2. Minimalfolgen. Da die konkurrenzfähige Funktion f ein *Dirichlet*sches Integral über Ω besitzt, so gibt es jedenfalls eine nicht negative untere Grenze d für die Werte, welche das *Dirichlet*sche Integral konkurrenzfähiger Funktionen über Ω annehmen kann. (Unser Ziel ist, zu zeigen, daß der Wert d wirklich von einer solchen Funktion erreicht wird.) Die Zahl d ist also dadurch definiert, daß für jede konkurrenzfähige Funktion φ

$$D[\varphi] \geqq d \tag{6.}$$

ist, und daß es eine Folge von konkurrenzfähigen Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ gibt**) derart, daß

$$\lim_{n=\infty} D[\varphi_n] = d \tag{7.}$$

wird. Eine solche Funktionsfolge soll eine Minimalfolge heißen.

Die Minimaleigenschaft einer Minimalfolge drückt sich in dem folgenden Hilfssatze aus:

Hilfssatz IV: *Ist $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ eine Minimalfolge, $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ eine Folge von Funktionen, die in Ω denselben Bedingungen wie die Funktionen φ genügen, die ferner verschwindende Randwerte besitzen, und deren Dirichletsche Integrale alle unterhalb einer von n unabhängigen Schranke liegen, so gilt*

$$\lim_{n=\infty} D[\varphi_n, \eta_n] = 0. \tag{8.}$$

In der Tat, da für jeden reellen Parameter ε die Funktion $\varphi_n + \varepsilon\eta_n$ konkurrenzfähig ist, so gilt

$$D[\varphi_n + \varepsilon\eta_n] = D[\varphi_n] + 2\varepsilon D[\varphi_n, \eta_n] + \varepsilon^2 D[\eta_n] \geqq d.$$

---

*) Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß im folgenden der Gebrauch des Hilfssatzes III ausgeschaltet werden kann, wenn man als weitere Konkurrenzbedingung hinzufügt, daß die Werte der zulässigen Funktionen auf jeder der in § 3 dieses Kapitels definierten Geraden eine analytische Funktion der Bogenlänge sind. Der Beweis gewinnt hierdurch etwas an Kürze, verliert jedoch an Natürlichkeit.

**) Es bietet keine Schwierigkeiten, solche Folgen wirklich anzugeben und damit sodann aus den nachfolgenden Existenzbeweisen ein Verfahren zur Konstruktion der betreffenden Potentialfunktionen zu machen.

Da nun $\lim_{n=\infty} D[\varphi_n] = d$ ist, so müssen alle Häufungsstellen der Werte $2\varepsilon D[\varphi_n, \eta_n] + \varepsilon^2 D[\eta_n]$ größer oder gleich Null sein, was auch ε sei. Das aber tritt dann und nur dann ein, wenn (7.) gilt.

Aus dem eben bewiesenen Hilfssatze ziehen wir eine wichtige Folgerung. Wir können die in der Identität

$$(9.) \qquad D[\varphi_m] = D[\varphi_n] + 2D[\varphi_n, \varphi_m - \varphi_n] + D[\varphi_m - \varphi_n]$$

auftretenden Differenzen $\varphi_n - \varphi_m$ mit den Funktionen η_n identifizieren, da ihr *Dirichlet*sches Integral wegen (4.) offenbar beschränkt ist. Lassen wir also n und gleichzeitig auch m irgendwie unbegrenzt wachsen, so folgt aus (7.), (8.) und (9.)

$$(10.) \qquad \lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} D[\varphi_m - \varphi_n] = 0.$$

3. Normierung der Minimalfolgen. Die Gleichung (10.) reicht keineswegs aus, um auf Konvergenz der Minimalfolge der φ_n schließen zu lassen. Vielmehr ist es leicht, Beispiele von solchen Folgen anzugeben, die in einer überall dichten Punktmenge divergieren. Hierin liegt die Hauptschwierigkeit für den Beweis*). Wir überwinden diese Schwierigkeit, indem wir von der Minimalfolge der φ_n zu einer anderen, normierten übergehen. Zu diesem Zwecke zerlegen wir Ω in abzählbar viele Rechtecke $R_1, R_2, R_3, \ldots$ mit achsenparallelen Seiten und gegen Null konvergierendem Umfang derart, daß im Inneren von Ω keine Häufungspunkte von Rechtecksecken vorkommen. Nun lösen wir mit den Werten, welche die Funktion φ_1 auf dem Rande jedes dieser Rechtecke R_h annimmt, als Randwerten für R_h die Randwertaufgabe der Potentialtheorie. So gelangen wir zu einer Funktion u_1, die auf allen Rechteckseiten mit φ_1 übereinstimmt, in jedem der R_h eine reguläre Potentialfunktion ist und ebenso wie φ_1 zu den konkurrenzfähigen Funktionen gehört, da ihre Extrema für jedes Rechteck auf dessen Rande liegen. In derselben Weise erhalten wir aus φ_2 eine konkurrenzfähige stückweise reguläre Potentialfunktion u_2 usw. Die Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ ist nun ebenfalls eine Minimalfolge; denn der Hilfssatz III sagt aus, daß das *Dirichlet*sche Integral jeder dieser Funktionen u_n über irgendeines der Rechtecke nicht größer als das entsprechende

*) Man kann sagen, daß alle verschiedenen Beweismethoden sich wesentlich durch die verschiedene Art der Überwindung dieser Schwierigkeit unterscheiden.

Integral für die betreffende Funktion φ_n ist. Es ist also auch $D[u_n] \leqq D[\varphi_n]$, und wegen $D[u_n] \geqq d$ und (7.) folgt

$$\lim_{n=\infty} D[u_n] = d. \tag{11.}$$

Wir bezeichnen die u_n als eine normierte Minimalfolge.

4. Konvergenz der normierten Minimalfolge. Von der normierten Minimalfolge zeigen wir nun mit Hilfe von Hilfssatz II leicht, daß sie im Inneren jedes der Rechtecke R_h konvergiert. Zunächst überzeugen wir uns von der Tatsache, daß die Werte c_n von u_n im Mittelpunkte P eines der Rechtecke, das wir mit R bezeichnen, absolut genommen unterhalb einer von n unabhängigen Schranke liegen. In der Tat muß die Kurve $u_n = \text{const.} = c_n$, die durch P geht, von P aus verfolgt nach dem Rande von R hinführen, da u_n eine in R reguläre Potentialfunktion ist. Es gibt also gewiß einen Parallelstreifen zu einer der Koordinatenachsen, etwa der x-Achse, der R durchschneidet, eine von n unabhängige Breite a besitzt und von der Kurve $u_n = c_n$ durchschnitten wird. Nun besagt der Hilfssatz I, daß es eine diesem Parallelstreifen angehörige Gerade $y = \text{const.}$ gibt, auf der das Integral $\int \left\{ \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2 \right\} dx$ kleiner als $\frac{D[u_n]}{a}$ ausfällt. Da aber die Randwerte von u_n auf dem Rande von Ω beschränkt sind, und der Ungleichung (5.) zufolge die Schwankung von u_n auf dieser Geraden wegen der Beschränktheit von $D[u_n]$ gleichmäßig in n beschränkt ist, so folgt unsere Behauptung über die Werte c_n; denn die Geraden $y = \text{const.}$ des Parallelstreifens verbinden jedenfalls einen Punkt der Kurve $u_n = c_n$ mit einem Punkt des Randes.

Wegen der Beschränktheit der c_n können wir jedenfalls eine Teilfolge $v_1, v_2, v_3, \ldots$ der u_n so auswählen, daß die Werte der v_n im Mittelpunkte von R konvergieren. Da nun die u_n eine Minimalfolge sind, so gilt wegen Gleichung (10.) $\lim D(u_n - u_m) = 0$ also auch $\lim D(v_n - v_m) = 0$, und nunmehr folgt nach Hilfssatz II unmittelbar, daß die v_n gleichmäßig in jedem ganz im Inneren von R liegenden Gebiet konvergieren. Die Grenzfunktion ist daher eine überall in R reguläre Potentialfunktion v.

Würde nun die Folge der u_n nicht selbst konvergieren, so gäbe es eine zweite Teilfolge $w_1, w_2, w_3, \ldots$, die in R gegen eine von v verschiedene Grenzfunktion w konvergiert. Wegen $\lim D(v_n - w_n) = 0$ könnten sich aber v und w nur um eine additive Konstante unterscheiden. Nun lehrt

die vorangehende Überlegung, wenn wir sie auf die Funktionen $p_n = v_n - w_n$ anwenden und das Verschwinden der Randwerte von p_n auf dem Rande von Ω sowie die Relation $\lim_{n=\infty} D[p_n] = 0$ beachten, daß bei hinreichend großem n die Werte von $|p_n|$ im Mittelpunkte P von R beliebig klein sind. Die konstante Differenz $v - w = \lim_{n=\infty} p_n$ kann also nicht von Null verschieden sein. Mithin ist bewiesen, daß die Funktionen u_n in jedem der Rechtecke konvergieren und daß die Grenzfunktion u eine im Inneren jedes dieser Rechtecke reguläre Potentialfunktion ist.

5. Regularität der Grenzfunktion in Ω. Auf den Seiten der Rechtecke braucht die Folge der u_n keineswegs zu konvergieren. Trotzdem werden wir zeigen, daß die zunächst nur für das Innere jedes Rechteckes definierten Funktionsstücke u sich zu einer in Ω stetigen und regulären Potentialfunktion zusammenschließen. Wir betrachten zu diesem Zwecke etwa zwei längs einer Seite aneinandergrenzende Rechtecke R und R_1 der Rechteckseinteilung. Anstatt die Normierung der Minimalfolge $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ wie in Nr. 3 vorzunehmen, hätten wir, wie in der Figur 1 durch Ziehen der punktierten Linie, ein Rechteck R' bilden können, das die R und R_1 gemeinsame Begrenzungslinie g in seinem Inneren enthält; so erhalten wir eine neue Rechteckseinteilung von Ω, die sich von der vorigen lediglich dadurch unterscheidet, daß der ursprünglich von R und R_1 eingenommene Raum nunmehr von zwei anderen Rechtecken R' und R'' erfüllt wird. Indem wir den Normierungsprozeß von Nr. 3 mit dieser neuen Rechteckseinteilung machen, erhalten wir aus den $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ eine neue Minimalfolge $u_1', u_2', u_3', \ldots$, die nach Nr. 3 gegen eine in R' reguläre Grenzfunktion u' konvergiert. Da auch die Folge $u_1, u_1', u_2, u_2', \ldots$ eine Minimalfolge ist, so gilt nach Gleichung (10.) $\lim_{n=\infty} D[u_n - u_n'] = 0$. Hieraus folgt nach Hilfssatz II, daß die Differenz $u_n - u_n'$ in allen von Seiten der alten und neuen Rechteckseinteilung freien Teilgebieten von Ω gegen konstante Werte konvergiert, und die Schlußbetrachtung von Nr. 4 lehrt, daß diese Konstanten Null sein müssen. Es ist also u mit u' in diesen Gebieten überhaupt identisch, und da u' auf g regulär ist, so ist die Behauptung dieses Paragraphen für die Linie g

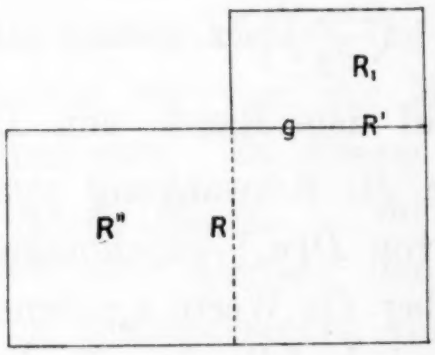

Fig. 1.

bewiesen. In derselben Weise erkennt man die Regularität von u in den Ecken der Rechteckseinteilung, indem man zu einer neuen Einteilung übergeht, bei der eine Ecke der alten Einteilung ins Innere eines Rechteckes zu liegen kommt.

6. Die Randwerte der Grenzfunktion. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß u die vorgeschriebenen Randwerte besitzt. Zu diesem Zwecke überzeugen wir uns zunächst, daß $D(u) = d$ ist. In der Tat folgt aus Gleichung (9.), wenn wir darin allein n ins Unendliche wachsen lassen, (8.) beachten und statt der Funktionen φ_n die Funktionen u_n einsetzen,

$$D[u_m] = d + \lim_{n=\infty} D[u_n - u_m];$$

hieraus aber ergibt sich, da für jedes ganz im Inneren von Ω liegende Gebiet $\lim_{n=\infty} D[u_n - u_m] \geqq D[u - u_m]$ ist, durch Grenzübergang zu $m = \infty$

$$\lim_{m=\infty} D[u - u_m] = 0. \tag{12.}$$

Nun ist

$$D[u - u_m] = D[u] - 2\,D[u, u_m] + D[u_m],$$

und wegen (4.) ist

$$D[u, u_m] \leqq \left| \sqrt{D[u]\,D[u_m]} \right|;$$

es ist also

$$D[u - u_m] \geqq D[u] + D[u_m] - 2\left| \sqrt{D[u]\,D[u_m]} \right|,$$

d. h.

$$D[u - u_m] \geqq \left| \left| \sqrt{D[u_m]} \right| - \left| \sqrt{D[u]} \right| \right|^2.$$

Wegen (12.) folgt hieraus

$$D[u] = \lim_{m=\infty} D[u_m] = d. \tag{13.}$$

Nunmehr betrachten wir (Fig. 2) einen Punkt P im Inneren von Ω, dessen kürzester Abstand vom Rande a ist; Q sei ein Randpunkt, so daß die Strecke PQ die Länge a besitzt. Da das Innere der Kreisfläche K mit P als Mittelpunkt und a als Radius ganz in Ω liegt, so muß die Kurve $u = \text{const.}$, die durch P geht, von P aus nach irgendeiner Richtung verfolgt nach dem Rande von K hinführen. Es muß also jede um P mit einem Radius $r < a$ geschlagene Kreislinie diese Kurve mindestens einmal treffen. Der Wert von u in P

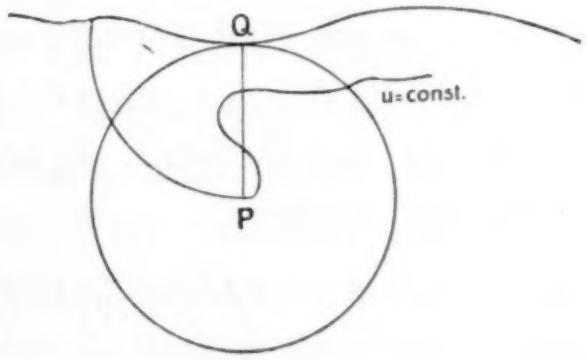

Fig. 2.

sei u^0, die Werte von u auf PQ bilden eine stetige Funktion $u(r)$ des Abstandes r vom Mittelpunkte P. Führen wir nun in K Polarkoordinaten r und ϑ ein, so haben wir offenbar

$$|u^0 - u(r)| \leqq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right| d\vartheta,$$

wobei das Integral bei festem r zu nehmen ist; denn der Integrationsweg trifft ja notwendig die Kurve $u = u^0$. Durch Integration dieser Ungleichung nach r und Anwendung der *Schwarz*schen Ungleichung erhalten wir

$$\int_0^a |u^0 - u(r)|\, dr \leqq \int_0^{2\pi}\int_0^a \left| \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right| d\vartheta\, dr \leqq \sqrt{2\pi a \int_0^{2\pi}\int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)^2 d\vartheta\, dr},$$

also, da $\frac{a}{r} \geqq 1$ ist, erst recht

$$\int_0^a |u^0 - u(r)|\, dr \leqq \sqrt{2\pi a^2 \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)^2 r\, d\vartheta\, dr}.$$

Da nun $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$ ist, haben wir schließlich

$$\int_0^a |u^0 - u(r)|\, dr \leqq a\sqrt{2\pi D_K[u]}, \tag{14.'}$$

wobei $D_K[u]$ den Wert des *Dirichlet*schen Integrals von u über K bedeutet.

Die analoge Betrachtung stellen wir nun für den Kreis K' mit dem Radius a um den Punkt Q an; die konzentrischen Kreise vom Radius $\varrho < a$ werden bei hinreichend kleinem a sämtlich den Rand von Ω treffen. Ist f_0 der vorgegebene Randwert im Punkte Q, so werden sich sämtliche Randwerte der Funktionen u_n in Randpunkten innerhalb K' um weniger als eine positive nur von a abhängende Zahl ε von f_0 unterscheiden, wobei ε mit a gegen Null konvergiert. Die analoge Betrachtung wie oben, für K' und die Funktion u_n ausgeführt, ergibt nun hier, wenn mit $u_n(\varrho) = u_n(a - r)$ die Werte der Funktion u_n auf dem Radius QP im Abstande ϱ von Q bezeichnet werden,

$$\int_0^a \{|u_n(\varrho) - f_0| - \varepsilon\}\, d\varrho \leqq a\sqrt{2\pi D_{K'}[u_n]};$$

dabei bedeutet $D_{K'}[u_n]$ das *Dirichlet*sche Integral von u_n über den zu Ω gehörigen Teil von K'. In dieser Ungleichheit können wir nun wegen (13.) sofort den Grenzübergang von u_n zu u vornehmen und erhalten so schließlich, wenn wir wieder r statt ϱ einführen,

$$\int_0^a \{|u(r) - f_0| - \varepsilon\}\, dr \leqq a\sqrt{2\pi D_{K'}[u]}.$$

Durch Addition dieser Relation zu (14.) ergibt sich nunmehr

$$\int_0^a \{|u^0 - f_0| - \varepsilon\}\, dr \leqq a\left\{\sqrt{2\pi D_K[u]} + \sqrt{2\pi D_{K'}[u]}\right\},$$

oder

$$|u^0 - f_0| - \varepsilon \leqq \sqrt{2\pi D_K[u]} + \sqrt{2\pi D_{K'}[u]}. \tag{15.}$$

Hiermit ist unsere Behauptung bewiesen; denn, da ε und die rechte Seite mit a gegen Null konvergiert, — und zwar gleichmäßig für den ganzen Rand —, so folgt hieraus, daß u^0 gegen f_0 konvergiert, wenn sich P dem Punkte Q nähert. Gleichzeitig enthält die Formel (15.) eine bemerkenswerte *Aussage über die Geschwindigkeit, mit der bei Annäherung des Punktes P an den Rand der Wert von u in P seinem Randwert zustrebt.*

Das Ergebnis der vorangehenden Betrachtungen ist also die Lösung des Dirichletschen Variationsproblemes von Nr. 1 und gleichzeitig der Randwertaufgabe der Potentialtheorie für den einfach zusammenhängenden Bereich Ω.

7. Verallgemeinerung des Resultats. Bei den vorangehenden Überlegungen ist von der Voraussetzung, daß Ω von einer *Jordan*schen Kurve begrenzt ist, nirgends wesentlich Gebrauch gemacht worden; diese Voraussetzung kann also, wenn $D[f]$ existiert, ohne jede Änderung des Ergebnisses aufgegeben werden. Ebenso ist die Voraussetzung des einfachen Zusammenhanges durchaus entbehrlich. Die Überlegungen unter Nr. 2—5 bleiben für jeden beliebigen, auch unendlich vielfach zusammenhängenden Bereich bestehen. Dagegen ist bei der Argumentation von Nr. 6 die Voraussetzung wesentlich, daß der um den Randpunkt Q geschlagene Kreis bei hinreichend kleinem Radius Randpunkte auf der Peripherie enthält, daß, wie wir sagen wollen, Q kein punktförmiges Begrenzungsstück ist. In der Tat können wir, wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, nicht erwarten, daß u in P den vorgeschriebenen Wert annimmt; so ist es z. B. im allgemeinen nicht möglich, eine Potentialfunktion zu konstruieren, die auf dem Rande und im Mittelpunkte eines Kreises vorgegebene Werte besitzt und sonst im Kreise regulär ist.

Verzichten wir aber auf die Forderung, daß u auch in den punktförmigen Begrenzungsstücken vorgeschriebene Randwerte annimmt, so bleibt die Überlegung von Nr. 6 bestehen, und *unter dieser Voraussetzung ist*

also die Randwertaufgabe für einen beliebigen schlichten, im Endlichen gelegenen, endlich oder unendlich vielfach zusammenhängenden Bereich gelöst.

Die Ausdehnung dieses Resultates auf nicht schlichte Bereiche liegt auf der Hand. — Ferner sieht man, daß alle unsere Überlegungen genau ebenso für die Randwertaufgabe der Potentialtheorie im Raume von drei und mehr Dimensionen gelten.

Was schließlich die Voraussetzung betrifft, daß die Vergleichsfunktion f ein endliches *Dirichlet*sches Integral besitzt, so läßt sich diese in bekannter Weise etwa für Bereiche mit lauter einfachen Randpunkten folgendermaßen nachträglich entbehrlich machen: Es seien $f_1, f_2, f_3, \ldots$ solche Polynome in x und y, daß die Randwerte von f_n gleichmäßig gegen die von f konvergieren. Nach den Ausführungen dieses Abschnittes existiert die mit f_n auf dem Rande übereinstimmende, in Ω reguläre Potentialfunktion $u^{(n)}$. Da nun auf dem Rande $u^{(n)} - u^{(m)}$ gleichmäßig beliebig klein wird, wenn nur n und m hinreichend groß sind, so existiert offenbar $\lim_{n=\infty} u^{(n)} = u$, und zwar gleichmäßig für alle Punkte von Ω einschließlich des Randes. Hieraus folgt, daß u die gesuchte Lösung der Randwertaufgabe ist.

III. Anwendung der Methode auf andere Existenzbeweise.

Die Methode des vorigen Abschnittes läßt sich ohne wesentliche Modifikationen zum Beweise der übrigen in der Einleitung genannten Existenzsätze anwenden. Es wird daher genügen, die Punkte hervorzuheben, in denen Änderungen jener Überlegungen eintreten. Zunächst ist hier der *Ansatz des Variationsproblemes* ein anderer. Handelt es sich z. B. um die Existenz der *Abelschen Integrale* zweiter und dritter Gattung mit vorgegebenen polaren bzw. logarithmischen Singularitäten auf einer gegebenen *Riemann*schen Fläche Ω, so scheint es das einfachste, eine von *H. Weyl**) herrührende Form des Ansatzes zugrunde zu legen. Sei etwa ein Integral zweiter Gattung zu finden, dessen Realteil u lediglich an einer nicht in einen Windungspunkt fallenden Stelle P ($x = 0$, $y = 0$) der *Riemann*schen Fläche unendlich wird, wie $\frac{\cos\varphi}{r}$, — unter φ und r Polarkoordinaten in dem x-y-System verstanden — so verfahre man nach *Weyl*

*) Vgl. das oben zitierte Buch, S. 91 ff.

folgendermaßen: Man schlage einen Kreis K von hinreichend kleinem Radius a um P, so daß durch K noch ein schlichtes Gebiet von Ω ausgeschnitten wird. Wir definieren ferner eine unstetige Funktion Φ, welche in K mit $\Psi = \frac{\cos\varphi}{r} + \frac{r\cos\varphi}{a^2}$ übereinstimmt und außerhalb K identisch Null ist. Auf K ist die normale Ableitung von Ψ Null. Nunmehr lautet das Variationsproblem: Unter allen auf Ω stückweise zweimal stetig differenzierbaren Funktionen φ, für die $\varphi + \Phi$ überall in Ω außer in P stetig ist, und die in einem willkürlich vorgeschriebenen Punkte A von Ω verschwinden, ist die gesucht, für welche das *Dirichlet*sche Integral

$$\iint_{(\Omega)} \left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy$$

ein Minimum wird.

Wird in P eine höhere Unstetigkeit vorgeschrieben, etwa $\frac{\cos n\varphi}{r^n}$, so wird Φ im Inneren von K mit $\frac{\cos n\varphi}{r^n} + r^n\frac{\cos n\varphi}{a^n}$ zu identifizieren sein; im übrigen bleibt das Variationsproblem ungeändert.

In analoger Weise wird Ψ und Φ definiert, wenn es sich um die Existenz eines Integrales dritter Gattung handelt, das in zwei Punkten von K logarithmisch unendlich wird. — Ist U die Lösung des obigen Variationsproblemes, so ist

$$u = U + \Phi$$

die gesuchte Potentialfunktion.

Die Integrale erster Gattung erhält man entweder durch Addition endlich vieler dritter Gattung oder durch Lösung eines Variationsproblemes der betrachteten Art, bei dem den konkurrenzfähigen Funktionen die Bedingung auferlegt wird, längs eines vorgegebenen, etwa aus Parallelen zur x- und y-Achse bestehenden Rückkehrschnittes der Fläche Ω einen gegebenen konstanten Sprung zu erleiden.

Ist Ω keine endlich vielblättrige und endlich vielfach zusammenhängende geschlossene *Riemann*sche Fläche, sondern ein völlig beliebiger Bereich, über dessen Blätterzahl, Zusammenhang und Berandung nichts vorausgesetzt wird, so liefert der obige Ansatz ebenfalls zugehörige Potentiale, bzw. analytische Funktionen. Speziell ist die Funktion mit einem Pol erster Ordnung in P diejenige, welche die *konforme Abbildung von Ω — wenn Ω ein „schlichtartiger" Bereich ist — auf die von geradlinigen,*

parallelen Schlitzen begrenzte Ebene liefert, und, wenn Ω die geeignete zu einer algebraischen Riemannschen Fläche gehörige Überlagerungsfläche ist, sich leicht als die uniformisierende Variabele vom Grenzkreis- bzw. Schottky-typus erweist. —*)

Um nun den Beweis für die Existenz der Lösung der obigen Variationsprobleme zu führen, verfahre man ganz analog wie in II; man zerlege Ω in Rechtecke $R_1, R_2, \ldots$, wobei Windungspunkte und unendlich ferne Punkte als Randpunkte zu betrachten sind und R_1 den Kreis K im Inneren enthält; man gehe sodann von einer beliebigen Minimalfolge $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ aus, deren Existenz hier klar ist, und normiere sie. Dabei ist auf das Rechteck R_1 besonders zu achten; wir haben nämlich für R_1 mit den Randwerten, die dort $\varphi_n - \Psi$ annimmt, die Randwertaufgabe zu lösen und die normierte Funktion u_n in K mit dieser Potentialfunktion p_n zu identifizieren, in dem übrigen Teil von R_1 jedoch $u_n = p_n + \Psi$ zu setzen. Wegen der Relation $\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$ auf K ist das *Dirichlet*sche Integral von u_n über R_1 kleiner als das von φ_n. Nun beweist man ebenso wie früher die Konvergenz der normierten Folge und die Regularität der um Φ vermehrten Grenzfunktion in allen im Endlichen gelegenen gewöhnlichen Punkten von Ω mit Ausnahme von P. Da nämlich in A die Werte von φ_n vorgeschrieben sind, so folgt zunächst die Konvergenz in dem A enthaltenden Rechtecke R, und hieraus ergibt sich dann die Konvergenz in den Nachbarrechtecken u. s. f. durch die analogen Schlüsse wie in II.

Die Regularität von u in unendlich fernen Punkten oder Windungspunkten, die innere Punkte von Ω sind, folgt sofort daraus, daß man sonst durch Lösung der Randwertaufgabe für das Äußere eines den betreffenden Punkt ∞ einschließenden Kreises oder für das Innere eines mehrfach überdeckten, den betreffenden Windungspunkt umschließenden Kreises mit den dort von der Funktion u angenommenen Randwerten zu einer konkurrenzfähigen Funktion u' mit kleinerem *Dirichlet*schen Integrale gelangen würde.

---

*) Vgl. die oben zitierte Arbeit des Verfassers sowie „Über die Anwendung des *Dirichlet*schen Prinzipes auf die Probleme der konformen Abbildung", Math. Ann., Bd. 71, 1911.

IV. Über Ränderzuordnung bei konformer Abbildung.

Die elementaren Betrachtungen des *Dirichlet*schen Integrales, die unserem Existenzbeweise zugrunde liegen, gestatten auch in einfacher Weise das Problem der *Ränderzuordnung bei konformer Abbildung*, — sofern es ein Problem der Funktionentheorie und nicht der Analysis situs ist — zu behandeln. Diese Untersuchungen gipfeln, soweit sie sich auf die konforme Abbildung eines einfach zusammenhängenden, von einer *Jordan*schen Kurve begrenzten Gebietes auf einen Kreis beziehen, in dem folgenden Satze*): *Bei der konformen Abbildung eines schlichten, von einer Jordanschen Kurve begrenzten einfach zusammenhängenden Bereiches B auf einen Kreis K entsprechen die Randpunkte von B und K einander umkehrbar eindeutig und stetig.* Darüber hinaus kann man auch bei *dem allgemeinsten einfach zusammenhängenden Bereich* nach *Carathéodory* zu einem entsprechenden Resultat gelangen, indem man erkennt, daß hier an Stelle der Randpunkte gewisse perfekte Punktmengen treten, die von *Carathéodory* als „*Primenden*“ bezeichnet werden.

Dieser Satz ist eine direkte Folge der beiden nachstehenden Hilfssätze:

Hilfssatz a)**). *Es sei $f(z) = u + iv$ eine in der Umgebung einer geradlinigen Strecke S der z-Ebene analytische Funktion der komplexen Variabeln $z = x + iy$, welche diese Umgebung auf einen Bereich mit end-*

*) Dieser Satz wurde 1903 ohne Beweis von *Osgood* veröffentlicht; erst 1913 erschien in den Transactions of the American mathematical society, Bd. XIV, eine Arbeit von *Osgood* und *Taylor*: „Conformal Transformations on the boundaries of their regions of definition“ mit einem Beweise des Satzes. Etwas früher als in dieser Arbeit erhielt das Problem der Ränderzuordnung seine Lösung durch *Carathéodory*: „Über die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer *Jordan*schen Kurve auf einen Kreis.“ „Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete“, Math. Ann., Bd. 73, 1913. Vgl. ferner das Buch von *Study* „Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, II“ (Leipzig 1913), die Noten von *Koebe* „Ränderzuordnung bei konformer Abbildung“ und *Carathéodory* „Zur Ränderzuordnung bei konformer Abbildung“ Gött. Nachr. 1913, eine Note von *Lindelöf*, „Sur la représentation conforme“ C. R., Paris, 26. Jan. 1914, die während des Druckes dieser Arbeit erschien, sowie eine Note von mir „Über eine Eigenschaft der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung“, Gött. Nachr. 7. Februar 1914.

**) Vgl. den analogen Hilfssatz, auf den Herr *Koebe* in seiner zitierten Note den Beweis stützt.

lichem Flächeninhalt abbildet; es seien ferner $C_1, C_2, C_3, \ldots$ unendlich viele einander nicht treffende analytische Kurvenstücke, die eine Teilstrecke AB von S gleichmäßig approximieren. Wenn dann die Funktionswerte $f(z)$ auf den C_n mit wachsendem n gegen eine Konstante c konvergieren, dann ist $f(z)$ identisch mit dieser Konstanten.

Zum Beweise beachten wir, daß die Voraussetzung der Endlichkeit des Flächeninhaltes des Bildbereiches die Endlichkeit des über die Umgebung von S erstreckten *Dirichlet*schen Integrales $D[u]$ und des gleichwertigen entsprechenden Integrals von v bedeutet, und nehmen zur Bequemlichkeit an, daß S in die x-Achse hineinfällt und daß $c = 0$ ist. Dann folgt sofort (Hilfssatz I, S. 192), daß es zwei Geraden $x = \text{const.}$, etwa g_1, g_2 gibt, die S innerhalb AB treffen, etwa in den Punkten A', B', und längs deren das einfache Integral

$$\int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} dy$$

einen endlichen Wert I_1 bezw. I_2 besitzt. Nun gilt aber auf g_1 für die Schwankung von u

$$(u(x, y_1) - u(x, y_2))^2 = \left(\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial y}\, dy \right)^2 \leqq (y_2 - y_1) \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy < |y_2 - y_1|\, I_1;$$

da aber die Werte von u in den Schnittpunkten von g_1 mit $C_1, C_2, C_3, \ldots$ gegen Null konvergieren, so konvergieren sie also auf g_1 bei Annäherung an das durch die C_n approximierte Ufer $A'B'$ überhaupt gegen Null, und dasselbe gilt für die Gerade g_2. Jetzt beachten wir, daß die Geraden g_1 und g_2 zusammen mit den C_n eine Folge einfach zusammenhängender, lückenlos aneinanderliegender Bereiche begrenzen, und daß auf den Rändern dieser Bereiche u beliebig klein ist, wenn der Bereich nur hinreichend nahe an AB liegt. Also konvergiert u, da eine Potentialfunktion ihre Extrema stets auf dem Rande eines Regularitätsgebietes besitzt, bei Annäherung an das betrachtete Ufer von AB überhaupt gegen Null. Dasselbe gilt von v und mithin von $f(z)$. Daher ist nach einem bekannten Satze der Funktionentheorie $f(z) \equiv 0$, q. e. d.

Hilfssatz b). *Sei $u(x, y)$ eine in einem schlichten Bereiche B der x-y-Ebene reguläre Potentialfunktion; sei P ein erreichbarer Randpunkt**)*

*) Wir zählen hierbei einen mehrfachen Punkt als mehrere einfache so, daß zwei Linien $C_1 C_2$ der oben betrachteten Art keine Randpunkte außer P einschließen dürfen.

von B und C_1, C_2 zwei in P endigende stückweise analytische Linien, die außer P nur innere Punkte von B enthalten. Wenn dann u Grenzwerte besitzt, sobald der Punkt (x, y) auf C_1 oder C_2 gegen P rückt, und wenn diese Grenzwerte verschieden sind, dann ist das Dirichletsche Integral von u erstreckt über B unendlich.

Zum Beweise führen wir Polarkoordinaten ϱ, ϑ um den Punkt P herum ein und betrachten einen Kreis mit dem Radius R um P, der so klein ist, daß die Differenz eines Wertes u in einem auf C_1 und in diesem Kreise gelegenen Punkte von einem Werte u in einem auf C_2 und in diesem Kreise gelegenen Punkte stets absolut genommen größer als eine feste positive Zahl α bleibt. Dann ist jedenfalls auf jedem konzentrischen Kreise vom Radius $\varrho < R$ die Schwankung von u größer als α, da jeder solche Kreis den von C_1 und C_2 ausgeschnittenen Zipfel von B durchschneidet. Es ist also für $0 < \varrho < R$

$$\alpha \leqq \int \left|\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right| d\vartheta,$$

wobei dieses Integral über den zwischen C_1 und C_2 fallenden Teil des konzentrischen Kreises mit dem Radius ϱ erstreckt ist. Es gilt also erst recht

$$\alpha^2 \leqq 2\pi \int \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)^2 d\vartheta = 2\pi\varrho \int \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)^2 \varrho\, d\vartheta.$$

Durch Division mit ϱ und Integration zwischen den Grenzen $0 < r \leqq \varrho \leqq R$ folgt

$$\alpha^2 \log \frac{R}{r} \leqq 2\pi \iint \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)^2 \varrho\, d\varrho\, d\vartheta, \tag{16.}$$

wobei das Integral rechts über den zwischen C_1 und C_2 fallenden Teil des Kreisringes zu erstrecken ist. Da nun

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \varrho}\right)^2$$

ist und die linke Seite von (16.) mit gegen Null konvergierendem r unendlich wird, so ist der Hilfssatz b) bewiesen.

Nunmehr folgt der *Osgood-Carathéodory*sche Satz unmittelbar. Sei B der abzubildende in der Ebene der komplexen Variabeln $\zeta = \xi + i\eta$ gelegene Bereich; statt ihn auf das Innere eines Kreises abzubilden, bilden wir ihn der Bequemlichkeit wegen auf die ganze, von einem geradlinigen

Schlitz S begrenzte z-Ebene ab, wobei einem gegebenen inneren Punkte O von B der unendlich ferne Punkt der z-Bildebene entspricht. B und das Bild jedes den Punkt O nicht im Inneren oder auf der Begrenzung enthaltenden Teilgebietes von B besitzt endlichen Flächeninhalt. $\zeta = f(z)$ sei die Abbildungsfunktion.

Sei nun P ein erreichbarer Randpunkt von B, C eine stückweise analytische, in B verlaufende, im Punkte P endigende Linie. Dann muß das Bild Γ von C in einem bestimmten Punkt des Schlitzes S endigen. Andernfalls nämlich müßte die Linie Γ, da jede auf ihr liegende Punktfolge, die einer gegen P konvergierenden Punktfolge entspricht, sich unbegrenzt dem Schlitze S nähern muß, ein Stück AB von S approximieren. Teile von Γ würden dann die Voraussetzungen der Kurven C_n in Hilfssatz a) erfüllen, und die Funktion $f(z)$, die die geschlitzte Ebene auf B abbildet, würde die Bedingungen der Funktion $f(z)$ dort erfüllen. Also müßte diese Funktion konstant sein, was widersinnig ist.

Es können ferner nicht zwei verschiedenen nach P hinführenden Einschnitten C, C' von B Bilder Γ, Γ' entsprechen, die in verschiedenen Punkten von S endigen; denn dies würde sofort zu einem Widerspruch mit Hilfssatz b) führen.

Jedem erreichbaren Randpunkte von B entspricht also ein bestimmter Randpunkt auf dem Schlitze S.

Sind P und Q verschiedene erreichbare Randpunkte von B, so entsprechen ihnen verschiedene Punkte auf S.

Denn andernfalls würde es zwei in der z-Ebene nach demselben Punkte von S führende Einschnitte geben, auf denen $f(z)$ verschiedene Grenzwerte besitzt, und dies würde, dem Hilfssatz b) zufolge, der Endlichkeit des Flächeninhaltes von B widersprechen.

Da eine *Jordan*sche Kurve nur einfache und erreichbare Randpunkte besitzt, so ist die Eineindeutigkeit der Ränderzuordnung für diese Kurven bewiesen. Die Stetigkeit der Zuordnung folgt aus der Bemerkung, daß beim Durchlaufen des Randes des einen Gebietes der Bildpunkt im selben Sinne einmal den Rand des Bildgebietes durchlaufen muß.

Um die entsprechenden Tatsachen für einen beliebigen einfach zusammenhängenden Bereich zu erkennen, kann man, wie *Carathéodory* es in seinen Untersuchungen getan hat, die Beschaffenheit des Randes zu-

nächst im Sinne der Analysis situs untersuchen. Hierbei erweisen sich gewisse Punktmengen, die den treffenden Namen Primenden erhalten haben, als die in gewissem Sinne einfachsten Elemente des Randes, und es ergibt sich sodann ähnlich wie bei den spezielleren Bereichen das Resultat, daß die Primenden von B eineindeutig den Punkten des Kreises, bezw. Schlitzes entsprechen. Es liegt nun aber auch nahe, den umgekehrten Weg einzuschlagen, indem man von der konformen Abbildung des Innern von B auf das Innere eines Kreises ausgeht und nunmehr auf Grund der aus den Hilfssätzen a) und b) gezogenen Folgerungen die Beschaffenheit des Randes von B untersucht. Man kann dann als ein Primende von B die Gesamtheit aller Randpunkte von B definieren, die Häufungspunkte von Bildpunkten irgendeiner gegen einen festen Randpunkt des Kreises konvergierenden Punktfolge sind. Dann ist der Satz von der eineindeutigen Zuordnung der Randpunkte des Kreises und der Primenden von B eine Folge der Definition. Auf Grund der vorangehenden Betrachtungen ergibt sich nun leicht die Übereinstimmung des obigen Begriffes mit dem *Carathéodory*schen, und man gelangt ferner zu wesentlichen, von *Carathéodory* untersuchten Eigenschaften der Primenden.

Zur Einordnung der Kettenbruchtheorie in die Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen.

Von Herrn *Ernst Hellinger* in Marburg a. d. L.
und Herrn *Otto Toeplitz* in Kiel.

Lange vor der Entwicklung einer systematischen Theorie der quadratischen Formen unendlichvieler Veränderlicher hat sich die Bemerkung dargeboten, daß die Lehre von den Kettenbrüchen aufs engste verknüpft ist mit einer gewissen besonderen Klasse von Formen dieser Art*), die wir im folgenden als J-Formen bezeichnen**):

$$(A.) \qquad J(x) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots - 2b_1 x_1 x_2 - 2b_2 x_2 x_3 - \cdots$$
$$= \sum_{(p)} (a_p x_p^2 - 2b_p x_p x_{p+1}), \quad \text{wo } b_p \neq 0.$$

Es handelte sich dabei zunächst um die bekannte Tatsache, daß gewisse zu der Formenschar

$$J(x) - \lambda E(x), \quad \text{wo } E(x) = \sum_{(p)} x_p^2 = \sum_{(p,q)} e_{pq} x_p x_q,$$

gehörige, d. h. aus ihrem Koeffizientenschema

$$\begin{pmatrix} a_1 - \lambda & -b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ -b_1 & a_2 - \lambda & -b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & -b_2 & a_3 - \lambda & -b_3 & \cdots \\ 0 & 0 & -b_3 & a_4 - \lambda & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

---

*) Man vergleiche etwa *E. Heines* Handbuch der Kugelfunktionen, Bd. I (2. Aufl., Berlin 1878), II. Teil, 4. Kap., insbesondere S. 420ff.

**) In der Note „Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen“ von *O. Toeplitz* (Nachr. d. Ges. d. Wiss., Göttingen, math.-phys. Kl. 1910, S. 489) sind diese Formen als *Jacobische Formen* bezeichnet. — Die Summationsindizes sollen im folgenden stets, wenn nichts anderes bemerkt, alle ganzzahligen Werte $1, 2, \ldots$ durchlaufen.

zu bildende Gleichungssysteme als Rekursionsformeln sowohl Näherungszähler und -nenner des Kettenbruches

$$\text{(B.)} \qquad \cfrac{1}{a_1 - \lambda - \cfrac{b_1^2}{a_2 - \lambda - \cfrac{b_2^2}{a_3 - \lambda - \ddots}}},$$

als auch diesen selbst bestimmen (vgl. übrigens § 1). Tiefer als diese mehr formalen Zusammenhänge führte die Bemerkung, daß man für eine J-Form endlichvieler Veränderlicher aus dem zugehörigen endlichen Kettenbruch (B.) bzw. seinen Näherungsnennern mit Leichtigkeit die orthogonale Transformation der Form in eine Summe von Quadraten erhält*); bereits *E. Heine* knüpft hieran die Feststellung an, daß für eine gewisse unendliche J-Form die Näherungsnenner des zugehörigen unendlichen Kettenbruches (B.) auf dieselbe Weise die orthogonale Transformation der Form auf eine Summe abzählbar unendlichvieler Quadrate liefern**).

Es liegt nahe, jetzt, nachdem im Anschluß an *Hilberts* Untersuchungen***) eine vollständige Theorie einer allgemeinen Klasse reeller quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen, der sog. *beschränkten Formen*, vorliegt, diesen Beziehungen genauer nachzugehen und insbesondere den Übergang zu der von *T. I. Stieltjes* entwickelten Kettenbruchtheorie†) herzustellen††). Indessen ist diese Verbindung beider Theorien nicht ohne weiteres zu gewinnen; eine der wesentlichen Schwierigkeiten, auf die man stößt, liegt darin, daß beide Theorien von durchaus verschiedenen Konvergenzbedingungen über die Koeffizienten a_p, b_p der Form bzw. des Kettenbruches ausgehen. Wir gehen in der vorliegenden Arbeit auf diese

---

*) Vgl. z. B. *Heine*, a. a. O., S. 419 f.

**) a. a. O., S. 421.

***) Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 4. Mitteilung (Nachr. d. Ges. d. Wiss., Göttingen, math.-phys. Kl. 1906, S. 157); zitiert als „Integralgl. IV". Buchausgabe, Leipzig 1912, Vierter Abschnitt.

†) Recherches sur les fractions continues (Ann. de la Fac. des sciences de Toulouse, t. VIII (1894) = Mém. prés. par div. sav. à l'Acad. des sciences, Paris, t. XXXII, Nr. 2. — Neuerdings ist diese Theorie in dem Lehrbuch von *O. Perron*, „die Lehre von den Kettenbrüchen" (Leipzig 1913) wiedergegeben worden.

††) Vgl. *Hilbert*, Integralgleichungen IV, S. 157; Buchausgabe, S. 109.

Seite der Beziehungen zwischen den *Stieltjes*schen Kettenbrüchen und den J-Formen der *Hilbert*schen Theorie, zu deren Klärung ein wesentlicher Beitrag in der Dissertation von Herrn *J. Grommer* *) enthalten ist, nicht erst ein. Vielmehr babsichtigen wir, die Stellung der unter die *Hilbert*sche Theorie fallenden J-Formen nach anderer Richtung hin klarzulegen: *es soll ihre Bedeutung für die allgemeine Theorie der reellen beschränkten quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen untersucht werden.* Wir haben dabei also durchweg nur mit *reellen beschränkten J-Formen* zu tun; für die Koeffizienten a_p, b_p bedeutet das einfach, daß sie reell sind und zwischen festen endlichen Grenzen m, M liegen:

$$m \leqq a_p \leqq M, \qquad m \leqq b_p \leqq M. \qquad (p=1, 2, \ldots)$$

Um eine kurze Formulierung unserer Resultate zu ermöglichen, sei vorweg an eine Reihe bekannter Tatsachen aus der Theorie der reellen beschränkten quadratischen Formen unendlichvieler Veränderlicher erinnert. Jede solche Form $K(x)$ besitzt ein in dem endlichen Intervall der reellen λ-Achse zwischen dem Minimum m und dem Maximum M der Werte $K(x):E(x)$ gelegenes *Spektrum*, das aus einer perfekten Punktmenge $\mathfrak{S}$ — dem *Streckenspektrum* — und den abzählbar unendlichvielen *Eigenwerten* λ_a besteht. *Hilbert* hat eine dieser Zerlegung entsprechende kanonische Darstellung angegeben ***):

$$\text{(I.)} \qquad K(x) = \sum_{(p,q)} k_{pq} x_p x_q = \int_{(\mathfrak{S})} \mu \, d\sigma(\mu; x) + \sum_{(a)} \lambda_a e(\lambda_a; x);$$

sie ist insofern der orthogonalen Transformation der endlichen quadratischen Form in eine Summe von Quadraten analog, als sich aus ihr unmittelbar eine Zerlegung von $K(x)$ in eine Summe zueinander orthogonaler Formen entnehmen läßt, deren jede einen beliebig gewählten Teil des Gesamtspektrums zum Spektrum hat: diese Bestandteile sind einfach die Teilintegrale oder Teilsummen über den betreffenden Teil des Spektrums. — In (I.) bedeuten

---

*) „Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen". Dieses Journ., Bd. 144, S. 114. In der *Grommer*schen Dissertation, deren Hauptziel in anderer Richtung liegt, sind diese Fragen als solche nur implizite beantwortet, insofern nur die Terminologie der Kettenbruchtheorie, nicht die der unendlichvielen Variablen benutzt wird; Herr *Grommer* beabsichtigt, in einer zweiten Arbeit seine Resultate auch nach dieser Seite hin zu verfolgen.

***) *Hilbert*, Integralgleichungen IV, Kap. XI; insbes. Satz II, III.

$$(\mathrm{I}^{\mathrm{a}}.) \qquad \sigma(\mu; x) = \sum_{(p,q)} \sigma_{pq}(\mu)\, x_p x_q, \qquad e(\lambda_a; x) = \sum_{(p,q)} e_{pq}(\lambda_a)\, x_p x_q$$

positiv definite quadratische Formen der x_p, und für jedes feste Wertsystem der x_p ist $\sigma(\mu; x)$ eine stetige monotone Funktion*) von μ, die in jedem außerhalb $\mathfrak{S}$ gelegenen Intervall konstant ist und für $\mu \leqq m$ identisch verschwindet (man kann daher das Integral in (I.) auch über das ganze Intervall (m, M) erstrecken); von ihren Orthogonalitätseigenschaften sei nur die Identität

$$(\mathrm{I}^{\mathrm{b}}.) \qquad E(x) = \sum_{(p)} x_p^2 = \int_{(\mathfrak{S})} d\sigma(\mu; x) + \sum_{(a)} e(\lambda_a; x)$$

hervorgehoben, und es sei ferner erwähnt, daß die Formenschar $K(x) - \lambda E(x)$ für alle Werte λ außerhalb des Spektrums, insbesondere also für alle komplexen λ, eine beschränkte reziproke Form $\mathsf{K}(\lambda; x)$ besitzt, die sog. *Resolvente* von $K(x)$, deren Koeffizienten $\varkappa_{pq}(\lambda)$ den Gleichungen

$$(\mathrm{I}^{\mathrm{c}}.) \qquad \sum_{(a)} k_{pa} \varkappa_{aq}(\lambda) - \lambda \varkappa_{pq}(\lambda) = e_{pq} = \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ 1 & (p = q) \end{cases} \qquad (p, q = 1, 2, \ldots)$$

genügen, und die die Darstellung gestattet:

$$(\mathrm{I}^{\mathrm{d}}.) \qquad \mathsf{K}(\lambda; x) = \sum_{(p,q)} \varkappa_{pq}(\lambda)\, x_p x_q = \int_{(\mathfrak{S})} \frac{d\sigma(\mu; x)}{\mu - \lambda} + \sum_{(a)} \frac{e(\lambda_a; x)}{\lambda_a - \lambda}.$$

Man kann nun aber jeden der hier auftretenden Elementarbestandteile noch weiter reduzieren: Einmal ist jedes $e(\lambda_a; x)$ gleich der Summe der Quadrate höchstens abzählbar unendlichvieler zueinander orthogonaler Linearformen, und andererseits läßt sich $\sigma(\mu; x)$ darstellen als Summe der von m bis μ erstreckten Integrale über die Quadrate von Systemen *orthogonaler linearer Differentialformen***) $\sum_{(p)} \varrho_p^{(\beta)}(\mu)\, x_p$ mit den (monotonen) *Basisfunktionen* $\varrho^{(\beta)}(\mu)$:

$$(\mathrm{II.}) \qquad \sigma(\mu; x) = \sum_{(\beta)} \int_m^{\mu} \frac{\left(d \sum_{(p)} \varrho_p^{(\beta)}(\mu)\, x_p\right)^2}{d\varrho^{(\beta)}(\mu)};$$

demgemäß geht die Darstellung (I.) über in:

---

*) *Monoton* schlechthin soll eine (stetige oder unstetige) Funktion von μ im folgenden stets heißen, wenn sie mit wachsendem μ niemals abnimmt; sie darf also auch streckenweise konstant bleiben.

**) *E. Hellinger*, die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlichvielen Variabelen (Dissert. Göttingen 1907), § 9. — Betr. der Eigenschaften der orthogonalen Differentialformen folgen nähere Angaben unten in § 2.

$$\text{(III.)} \qquad K(x) = \sum_{(\beta)} \int_{(\mathfrak{S})} \mu \frac{(d \sum_{(p)} \varrho_p^{(\beta)}(\mu) x_p)^2}{d\varrho^{(\beta)}(\mu)} + \sum_{(\gamma)}' \lambda_\gamma (\sum_{(p)} l_{\gamma p} x_p)^2,$$

wo jetzt die Eigenwerte λ_γ nicht mehr notwendig verschieden voneinander sind, sondern jeder so oft auftritt, wie seine *Vielfachheit* angibt; ebenso ergibt sich aus (I^a.):

$$\text{(III}^a\text{.)} \qquad E(x) = \sum_{(\beta)} \int_{(\mathfrak{S})} \frac{(d \sum_{(p)} \varrho_p^{(\beta)}(\mu) x_p)^2}{d\varrho^{(\beta)}(\mu)} + \sum_{(\gamma)}' (\sum_{(p)} l_{\gamma p} x_p)^2.$$

Reduziert sich $\sigma(\mu; x)$ auf das Integral eines *einzigen* Quadrates vom Typus (II.), so redet man von einem *einfachen Streckenspektrum*; es ist bestimmt als Menge der Stellen, in deren Umgebung die monotone Basisfunktion $\varrho^{(\beta)}(\mu)$ nicht konstant ist. Die Darstellung (III.) kann man daher allgemein als *Zerlegung von $K(x)$ in abzählbar unendlichviele zueinander orthogonale Formen mit einfachem Punkt- und Streckenspektrum ansehen;* durch orthogonale Transformation der Variabeln kann man es erreichen, daß jede dieser Teilformen verschiedene Reihen von Veränderlichen enthält.

Die einzelnen Linearformen, die in (III.) eingehen, sind bestimmt als Lösungen gewisser mit dem Koeffizientenschema der Formenschar $K(x) - \lambda E(x)$ gebildeten homogenen linearen Gleichungen*), und zwar ist

$$\text{(IV.)} \qquad \sum_{(q)} k_{pq} (\varrho_q^{(\beta)}(\mu) - \varrho_q^{(\beta)}(\mu_1)) - \int_{\mu_1}^{\mu} \mu \, d\varrho_p(\mu) = 0, \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

$$\text{(V.)} \qquad \sum_{(q)} k_{pq} l_{\gamma q} - \lambda_\gamma l_{\gamma p} = 0, \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

wozu noch die normierenden Bedingungen treten:

$$\text{(IV}^a\text{.)} \qquad \sum_{(p)} \varrho_p^{(\beta)}(\lambda)^2 = \varrho^{(\beta)}(\lambda),$$

$$\text{(V}^a\text{.)} \qquad \sum_{(p)} l_p^{(\gamma)^2} = 1.$$

Die Existenz von Lösungen der Gleichungen (IV.) charakterisiert die Stellen μ bzw. die Intervalle, die zum Streckenspektrum gehören, die der Gleichungen (V.) die Eigenwerte; die Anzahl der unabhängigen Lösungen (in einem hier nicht genauer zu erörternden Sinne) entspricht der Vielfachheit, mit der die betreffende Stelle bzw. das Intervall zum Spektrum gehört. —

---

*) *Hilbert*, Integralgl. IV, Kap. XI, Satz IV; *Hellinger*, Orthogonalinvarianten, § 3; *Hellinger*, Neue Begründung der Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen (Dieses Journ. 136 [1909], S. 210), § 2, § 5.

Nunmehr können wir als erstes, im wesentlichen bekanntes Theorem aussprechen, *daß jede beschränkte J-Form sowohl ein einfaches Streckenspektrum als auch einfache Eigenwerte besitzt, die übrigens auch in dem Streckenspektrum gelegen sein können.* Darin sind implizite einige bekannte Resultate der Kettenbruchtheorie enthalten; insbesondere liefert die Formel (I^d.), angewandt auf eine *J*-Form, die *Stieltjes*sche Integraldarstellung des zugehörigen Kettenbruches. Freilich ist der Bereich, auf den sich die hier gewonnenen Sätze beziehen, gemäß der Vorbemerkung ein etwas anderer, als bei *Stieltjes*.

Einen zweiten Satz, der die Stellung der *J*-Formen in der Theorie der beschränkten Formen nach anderer Richtung hin charakterisiert, hat *O. Toeplitz**) vor längerer Zeit bewiesen, ohne von der *Hilbert*schen Theorie Gebrauch zu machen: *Man kann jede reelle beschränkte quadratische Form durch eine passende orthogonale Transformation in höchstens abzählbar unendlichviele J-Formen zerspalten, die von verschiedenen Reihen von Veränderlichen abhängen;* dabei ist die Möglichkeit des Verschwindens einzelner Koeffizienten b_p zuzulassen, was eine Abspaltung quadratischer Formen von endlichvielen Veränderlichen von den hier betrachteten eigentlichen *J*-Formen bedeutet. Unter Heranziehung des ersten Theorems erkennt man, daß dieser Satz in genauestem Zusammenhange mit der durch (III.) gegebenen Zerspaltung von $K(x)$ in Formen mit einfachem Spektrum steht, indem auch er eine derartige Zerlegung gibt. Es bleibt nur die Frage offen, ob diese beiden Zerlegungen überhaupt im wesentlichen identisch sind, d. h. ob jede Form mit einfachem Spektrum sich orthogonal in *eine J*-Form transformieren läßt, oder ob es Formen mit einfachem Spektrum gibt, die nur eine Zerspaltung in *mehrere J*-Formen zulassen.

Die Antwort auf diese Frage ist das Hauptresultat unserer Arbeit: *Jede beschränkte quadratische Form mit einfachem Streckenspektrum und einfachen Eigenwerten (die auch im Streckenspektrum liegen können) kann orthogonal in eine J-Form transformiert werden*; die *J*-Formen erscheinen danach geeignet, als Elemente einer allgemeinen Theorie der quadratischen Formen Verwendung zu finden. Übrigens ist diese Transformation keineswegs eindeutig bestimmt; *es gibt stets unendlich viele untereinander orthogonal*

---

*) In der eingangs (S. 212, Fußnote**)) zitierten Arbeit. Vgl. insbes. Nr. 1; 2, Satz 3.

äquivalente J-Formen, entsprechend den unendlichvielen Basisfunktionen, durch die man eine Form darstellen kann. *Es ergibt sich aber für jede J-Form eine im wesentlichen eindeutig bestimmte Normaldarstellung*; sie ist festgelegt durch eine monotone Funktion $\varrho(\mu)$, die durch ihre Sprungstellen die Eigenwerte, durch die übrigen Stellen, in deren Umgebung sie nicht konstant ist, das Streckenspektrum der Form bestimmt, und die ihrerseits durch die J-Form bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist. In diese Normalform geht ein gewisses, durch $\varrho(\mu)$ eindeutig bestimmtes, „in bezug auf $\varrho(\mu)$ orthogonales" System von Polynomen, deren Benutzung ein wesentliches Hilfsmittel unserer Betrachtung ist; sie sind mit den Näherungsnennern des Kettenbruches (B.) identisch und sind zuerst von *P. Tschebyscheff**), *E. Heine***) und *G. Darboux****) untersucht worden. —

Im folgenden werden in § 1 für eine vorgegebene J-Form Spektrum und Eigenformen gebildet und die erwähnte Normalform hergeleitet, wobei zum Teil auch bekannte Entwicklungen der Kettenbruchtheorie in geeigneter Weise aufzunehmen waren. Das Weitere ist dann dem Problem der Transformation einer gegebenen Form mit einfachem Spektrum in eine J-Form gewidmet, und zwar werden in § 2 die Formen ohne Punktspektrum vorweggenommen, in § 3 dann der allgemeine Fall erledigt. — Die Untersuchung knüpft wesentlich an die in der Arbeit „neue Begründung der Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen" (dieses Journ., Bd. 136 (1909), S. 216) von *E. Hellinger* befolgten Methoden und Wege an; insbesondere werden neben den *Stieltjes*schen Integralen auch die dort benutzten Integralbegriffe durchgehends verwendet†). Für die allgemeinen Grundbegriffe der Theorie der beschränkten Formen sei auf unsere gemeinsame Arbeit „Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen" (Math. Ann., Bd. 69 (1910), S. 289) verwiesen.

*) Journ. de Math. (2) 3 (1858), p. 289.

**) Monatsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. 1866, und Handbuch d. Kugelf. I, S. 286 ff.

***) Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres, et sur une classe étendue de dével. en série. Journ. de Math. (3) 4 (1878), p. 411 (Nr. XVI).

†) Herr *H. Hahn* („Über die Integrale des Herrn *Hellinger* und die Orthogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen", Monatsh. f. Math. u. Phys. XXIII (1912), S. 161) hat ausführlich dargelegt, wie man diese Integrale durch *Lebesgue*sche ersetzen kann; die Gründe, aus denen wir ihm nicht folgen, wird *E. Hellinger* demnächst an anderem Orte ausführen. (Vgl. übrigens auch *Hellinger*, Orthogonalinvarianten, S. 29 unten).

§ 1. Das Spektrum einer J-Form.

1. Wir beginnen damit, für eine beliebige reelle, beschränkte J-Form

(1.) $$J(x) = \sum_{(p)} (a_p x_p^2 - 2 b_p x_p x_{p+1}) = \sum_{(p,q)} k_{pq} x_p x_q \quad (k_{pq} = k_{qp},\ k_{p,p+1} = b_p \neq 0)$$

Spektrum und Eigenformen sowie die kanonische Darstellung (III.) zu bestimmen. Die zu der Formenschar $J(x) - \lambda E(x) = J(x) - \lambda \sum_{(p)} x_p^2$ gehörigen homogenen Gleichungen, deren Lösungen gemäß (IV.), (V.) die Eigenformen liefern müssen, lauten

(2.) $$\begin{cases} (a_1 - \lambda)\,\pi_1 - b_1\,\pi_2 = 0, \\ -b_{p-1}\pi_{p-1} + (a_p - \lambda)\,\pi_p - b_p \pi_{p+1} = 0. \qquad (p = 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

Setzen wir π_1 einer willkürlichen Konstanten gleich, so bestimmen sie wegen $b_p \neq 0$ in eindeutiger Weise eine Folge von reellen Polynomen ansteigenden Grades in λ:

(3.) $$\pi_1 = c, \quad \pi_2 = \pi_2(\lambda), \quad \pi_3 = \pi_3(\lambda), \ldots,$$

wobei also $\pi_p(\lambda)$ genau vom $(p-1)$-ten Grade ist.

Es sei nun

(4.) $$\mathsf{K}(\lambda; x) = \sum_{(p,q)} \varkappa_{pq}(\lambda) x_p x_q \qquad (\varkappa_{pq} = \varkappa_{qp})$$

die reziproke Form von $J(x) - \lambda E(x)$, die für alle Werte λ außerhalb des Spektrums von $J(x)$ notwendig als beschränkte quadratische Form existiert; die Gleichungen (I^c.) für ihre Koeffizienten lauten:

(5.) $$-b_{p-1}\varkappa_{p-1,q}(\lambda) + (a_p - \lambda)\varkappa_{pq}(\lambda) - b_p \varkappa_{p+1,q}(\lambda) = e_{pq}, \quad (p, q = 1, 2, \ldots)$$

wobei $b_0 = 0$ zu setzen ist. Wir können diese Gleichungen ihrerseits wieder als Rekursionsformeln auffassen, die alle Koeffizienten einer Kolonne $\varkappa_{pq}(\lambda)$ (bei festem q) sukzessive durch den ersten $\varkappa_{1q}(\lambda)$ ausdrücken. Um die Auflösung bequem auszuführen*), betrachten wir die Polynome $\pi_p^{(q)}(\lambda)$, die aus den $\pi_p(\lambda)$ entstehen, wenn man die Indizes der a_p, b_p je um q Einheiten erhöht und $c = -\frac{1}{b_q}$ setzt; sie genügen den Gleichungen

(6.) $$\begin{cases} -b_q \pi_1^{(q)}(\lambda) = 1, \\ (a_{q+1} - \lambda)\,\pi_1^{(q)}(\lambda) - b_{q+1}\pi_2^{(q)}(\lambda) = 0, \\ -b_{q+p-1}\pi_{p-1}^{(q)}(\lambda) + (a_{q+p} - \lambda)\pi_p^{(q)}(\lambda) - b_{q+p}\pi_{p+1}^{(q)}(\lambda) = 0. \quad (p = 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

Zieht man jede dieser Gleichungen von der Gleichung ab, die aus (5.)

---

*) Diese Bestimmung der $\varkappa_{pq}(\lambda)$, analog bekannten Formeln der Kettenbruchtheorie, hat *O. Toeplitz*, Gött. Nachr., 1910, S. 497 durchgeführt; die A_p daselbst sind hier durch $\frac{1}{c} b_1 b_2 \cdots b_p \pi_{p+1}$ ersetzt.

durch Ersetzung von p durch q bzw. $q+1$ bzw. $q+p$ entsteht, so ergibt sich

$$-b_{q-1}\varkappa_{q-1,q}(\lambda)+(a_q-\lambda)\varkappa_{qq}(\lambda)-b_q\{\varkappa_{q+1,q}(\lambda)-\pi_1^{(q)}(\lambda)\}=0,$$
$$-b_q\varkappa_{qq}(\lambda)+(a_{q+1}-\lambda)\{\varkappa_{q+1,q}(\lambda)-\pi_1^{(q)}(\lambda)\}-b_{q+1}\{\varkappa_{q+2,q}(\lambda)-\pi_2^{(q)}(\lambda)\}=0,$$
$$-b_{q+p-1}\{\varkappa_{q+p-1,q}(\lambda)-\pi_{p-1}^{(q)}(\lambda)\}+(a_{q+p}-\lambda)\{\varkappa_{q+p,q}(\lambda)-\pi_p^{(q)}(\lambda)\}$$
$$-b_{q+p}\{\varkappa_{q+p+1,q}(\lambda)-\pi_{p+1}^{(q)}(\lambda)\}=0. \qquad (p=2,3,\ldots)$$

Bei festem q bilden diese Gleichungen im Verein mit den aus (5.) für $p=1, 2, \ldots q-1$ entstehenden ein genau mit (2.) übereinstimmendes System homogener Gleichungen, dessen Lösungen also bis auf einen Faktor u_q mit den Funktionen (3.) identisch sind; es folgt daher

$$\varkappa_{pq}(\lambda)=u_q\pi_p(\lambda) \qquad (p\leqq q),$$
$$\varkappa_{pq}(\lambda)=u_q\pi_p(\lambda)+\pi_{p-q}^{(q)}(\lambda) \qquad (p>q). \qquad (q=1,2,\ldots)$$

Wegen der Symmetrie der Form $\mathsf{K}(\lambda;x)$ ergibt sich weiterhin die Identität von

$$\varkappa_{1q}(\lambda)=u_q\pi_1(\lambda) \quad \text{und} \quad \varkappa_{q1}(\lambda)=u_1\pi_q(\lambda)+\pi_{q-1}^{(1)}(\lambda) \qquad (q>1).$$

Demnach lassen sich alle u_q durch u_1 ausdrücken, das selbst eine zunächst noch unbekannte Funktion von λ bleibt; setzen wir etwa $u_1=cu(\lambda)$, also

$$(7^a.) \qquad \varkappa_{11}(\lambda)=\pi_1(\lambda)^2\cdot u(\lambda)=c^2u(\lambda),$$

so ergibt sich allgemein

$$(7^b.) \qquad \varkappa_{pq}(\lambda)=\pi_p(\lambda)\pi_q(\lambda)u(\lambda)+g_{pq}(\lambda),$$

wo

$$(7^c.) \qquad g_{pq}(\lambda)=\begin{cases}\frac{1}{c}\pi_p(\lambda)\pi_{q-1}^{(1)}(\lambda) & (p\leqq q)\\ \frac{1}{c}\pi_q(\lambda)\pi_{p-1}^{(1)}(\lambda) & (p\geqq q)\end{cases}$$

ein reelles Polynom $(p+q-3)$-ten Grades in λ ist.

Um nun endlich auch einen Ausdruck für $u(\lambda)$ zu gewinnen, ziehen wir den Satz von *Hilbert**) heran, daß die Resolvente $\mathsf{K}_n(\lambda;x)$ des n-ten Abschnittes J_n von J für alle außerhalb des Spektrums von J gelegenen Werte λ — insbesondere also für alle nicht reellen und alle reellen außerhalb des Intervalles (m, M) liegenden Werte — gegen $\mathsf{K}(\lambda;x)$ konvergiert; dabei sind nur die Indizeswerte n fortzulassen, für die das betrachtete λ gerade ein Eigenwert von J_n, d. h. eine Nullstelle von $\pi_{n+1}(\lambda)$, ist. Insbesondere muß also der erste Koeffizient $\varkappa_{11}^{(n)}(\lambda)$ von $\mathsf{K}_n(\lambda;x)$ gegen $\varkappa_{11}(\lambda)$ konvergieren, und da er sich aus den n Gleichungen

*) Integralgleichungen IV, S. 185; Buchausgabe, S. 134.

$$(a_1 - \lambda)\varkappa_{11}^{(n)} - b_1\varkappa_{21}^{(n)}(\lambda) = 1,$$
$$-b_{p-1}\varkappa_{p-1,1}^{(n)}(\lambda) + (a_p - \lambda)\varkappa_{p1}^{(n)}(\lambda) - b_p\varkappa_{p+1,1}^{(n)}(\lambda) = 0, \quad (p=2, 3, \dots n-1)$$
$$-b_{n-1}\varkappa_{n-1,1}^{(n)}(\lambda) + (a_n - \lambda)\varkappa_{n1}^{(n)}(\lambda) = 0$$

als Kettenbruch

$$\varkappa_{11}^{(n)}(\lambda) = \left|\frac{1}{a_1-\lambda}\right| - \left|\frac{b_1^2}{a_2-\lambda}\right| - \cdots - \left|\frac{b_{n-1}^2}{a_n-\lambda}\right| = -c\,\frac{\pi_n^{(1)}(\lambda)}{\pi_{n+1}(\lambda)}$$

ergibt, erhalten wir schließlich

$$(8.) \qquad c^2 u(\lambda) = \left|\frac{1}{a_1-\lambda}\right| - \left|\frac{b_1^2}{a_2-\lambda}\right| - \left|\frac{b_2^2}{a_1-\lambda}\right| - \cdots = -c\lim_{n=\infty}\frac{\pi_n^{(1)}(\lambda)}{\pi_{n+1}(\lambda)};$$

gleichzeitig ist die Konvergenz dieses unendlichen Kettenbruches für die betrachteten λ-Werte bewiesen. Wir haben damit das folgende Resultat*):

Satz I: *Liegen die a_p, b_p zwischen festen endlichen Grenzen m, M, so konvergiert der Kettenbruch* (8.) *für alle außerhalb des Spektrums der J-Form* (1.) *gelegenen Werte λ (wobei event. die für das betreffende λ sinnlos werdenden Näherungsbrüche fortzulassen sind); insbesondere findet gewiß Konvergenz für alle komplexen und für alle außerhalb des Intervalles (m, M) gelegenen reellen λ statt.*

2. Aus der durch diese Formeln vermittelten Kenntnis der reziproken Form $\mathsf{K}(\lambda; x)$ für alle komplexen λ kann man durch passende Annäherung an die reelle Achse bekanntlich die Eigenformen und das Spektrum gewinnen**). Indem wir die allgemeine Darstellungsformel (I^d.) der Einleitung heranziehen, stellt sich dieser Prozeß gewissermaßen als eine Umkehrung der Formel (I^d.) dar, indem die Eigenformen $\sigma(\mu; x)$ und $e(\lambda_a; x)$ durch die Werte von $\mathsf{K}(\lambda; x)$ ausgedrückt werden; so hat ihn bereits *Stieltjes****) in seiner Kettenbruchtheorie zu ganz analogem Zweck verwendet.

Wir zerlegen λ in reellen und imaginären Teil:

$$\lambda = \lambda' + i\lambda'',$$

und entnehmen aus (I^d.) für den imaginären Teil von $\mathsf{K}(\lambda; x)$:

---

*) Dieser Satz umfaßt ein bekanntes Theorem von *A. Markoff* (Acta math. 19 (1895), S. 93; vgl. *Perron*, Lehrbuch, S. 384 ff.), das den Kettenbruch aus einem bestimmten Integral entstehen läßt; durch Heranziehung von Satz II zeigt sich, daß beide Sätze gleichbedeutend sind.

**) Es handelt sich hier genau um den dem Existenzbeweis des Spektrums bei *Hellinger*, „quadrat. Formen", Kap. III zugrunde liegenden Grenzprozeß.

***) a. a. O., Kap. VI. Vgl. auch *Perron*, Lehrbuch, § 66.

$$(9.)\qquad \Re\left\{\frac{1}{i}\,\mathsf{K}(\lambda'+i\lambda'';\,x)\right\}=\int_{(\mathfrak{S})}\frac{\lambda''\,d\sigma(\mu;\,x)}{(\mu-\lambda')^2+\lambda''^2}+\sum_{(\alpha)}\frac{\lambda''\,e(\lambda_\alpha;\,x)}{(\lambda_\alpha-\lambda')^2+\lambda''^2};$$

wir ziehen ausschließlich positive Werte von λ'' in Betracht. Wegen der Monotonität von $\sigma(\mu;\,x)$ und der Positivität der $e(\lambda_\alpha;\,x)$ ist dieser Ausdruck notwendig positiv; integrieren wir ihn bei festem λ'' nach λ', etwa von der unteren Grenze m an, so entsteht also eine *monotone*, übrigens stetige Funktion der oberen Grenze λ'. Offenbar darf nun sowohl die Folge der Integrationen im ersten Summanden vertauscht werden — denn die Grenzen sind endlich und der Integrand regulär*) — als auch die Reihenfolge von Summation und Integration im zweiten — denn wegen der Konvergenz von $\sum_{(\alpha)} e(\lambda_\alpha;\,x)$ konvergiert die Reihe gleichmäßig in λ' —, und wir erhalten

$$\int_m^{\lambda'}\Re\left\{\frac{1}{i}\,\mathsf{K}(\lambda'+i\lambda'';\,x)\right\}d\lambda'=\int_m^M\left[\operatorname{Arctg}\frac{\lambda'-\mu}{\lambda''}\right]_m^{\lambda'}d\sigma(\mu;\,x)$$
$$+\sum_{(\alpha)}\left[\operatorname{Arctg}\frac{\lambda'-\lambda_\alpha}{\lambda''}\right]_m^{\lambda'}e(\lambda_\alpha;\,x),$$

wobei Arctg den zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ gelegenen Hauptwert bedeutet. Konvergiert nun λ'' gegen 0, so konvergiert $\operatorname{Arc\,tg}\frac{\lambda'-\mu}{\lambda''}$ gegen $\pm\frac{\pi}{2}$ je nachdem $\lambda'\gtrless\mu$, und zwar gleichmäßig in bezug auf μ in jedem die Stelle $\mu=\lambda'$ nicht enthaltenden Intervalle; ebenso konvergiert $\operatorname{Arc\,tg}\frac{m-\mu}{\lambda''}$ in jedem nicht an m heranreichenden Intervalle gleichmäßig gegen $\frac{\pi}{2}$. Läßt man also von dem ersten Integral je ein m und λ' einschließendes beliebig kleines Intervall fort, so konvergiert der Rest mit abnehmendem λ'' gegen

$$\int_{m+\varepsilon}^{\lambda'-\varepsilon}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)d\sigma(\mu;\,x)+\int_{\lambda'-\varepsilon}^{M}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)d\sigma(\mu;\,x);$$

da aber die fortgelassenen Bestandteile unterhalb $\pi\int_m^{m+1}d\sigma(\mu;\,x)$ bzw. $\pi\int_{\lambda'-\varepsilon}^{\lambda'+\varepsilon}d\sigma(\mu;\,x)$ bleiben und dies beides wegen der Stetigkeit von σ beliebig klein wird, so ist schließlich der Grenzwert des ganzen Integrals

$$\pi\int_m^{\lambda'}d\sigma(\mu;\,x)=\pi\cdot\sigma(\lambda';\,x)-\pi\,\sigma(m;\,x)=\pi\cdot\sigma(\lambda';\,x).$$

---

*) Daß hier ein *Stieltjes*sches Integral eingeht, macht keinen wesentlichen Unterschied gegen den bekannten Satz für *Riemann*sche Integrale; es kann zudem, da $\sigma(\mu;\,x)=\sigma$ eine monotone Funktion von μ ist, durch Substitution der neuen Veränderlichen σ für μ sofort zu einem *Riemann*schen Integral übergegangen werden.

Auch der Grenzwert der unendlichen Reihe für $\lambda''=0$ ergibt sich durch Vollziehung des Grenzüberganges in jedem einzelnen Gliede, da die Reihe in bezug auf λ'' gleichmäßig konvergiert; der Grenzwert des Arc tg-Faktors ist wiederum π oder 0, je nachdem $\lambda' \gtrless \lambda_a$, und $\frac{\pi}{2}$, wenn $\lambda'=\lambda_a$. Daher folgt schließlich

$$(10.)\quad \lim_{\lambda''=0} \int_m^{\lambda'} \Re\left\{\frac{1}{i\pi} \mathsf{K}(\lambda'+i\lambda''; x)\right\} d\lambda' = \sigma(\lambda'; x) + \sum_{(\lambda_a<\lambda')} e(\lambda_a; x), \text{ bzw.}$$
$$= \sigma(\lambda'; x) + \sum_{(\lambda_a<\lambda')} e(\lambda_a; x) + \tfrac{1}{2} e(\lambda'; x),$$

wobei die Summe über alle *unterhalb* λ' gelegenen Eigenwerte zu erstrecken ist und die zweite Zeile gilt, falls λ' einem der Eigenwerte λ_a gleich ist. Wegen der Stetigkeit von $\sigma(\lambda'; x)$ und der Konvergenz von $\sum_{(a)} e(\lambda_a; x)$ ist die so definierte monotone Funktion von λ' stetig an jeder von allen Eigenwerten λ_a verschiedenen Stelle λ', auch wenn sie Häufungsstelle der λ_a ist; ihr Sprung an einer Stelle λ_a, d. h. die Differenz der Grenzwerte bei Annäherung von rechts und von links, ist $e(\lambda_a; x)$.

3. Tragen wir nunmehr die Ausdrücke (7.) der Koeffizienten $\varkappa_{pq}(\lambda)$ in diese Formel (10.) ein, so gelingt es, die Eigenformen $\sigma(\lambda'; x)$ und $e(\lambda_a; x)$ und damit das Spektrum allein durch die Polynome $\pi_p(\lambda)$ und die analytische Funktion $u(\lambda)$ auszudrücken, und zwar wird sich ergeben, daß das Spektrum allein durch die Singularitäten von $u(\lambda)$ bestimmt ist.

Wir bilden zunächst aus (10.), indem wir $x_1 = \frac{1}{c}$, $x_2 = x_3 = \cdots = 0$ setzen, die mit Ausnahme der Stellen λ_a stetige monotone Funktion

$$(11.)\quad \varrho(\lambda') = \lim_{\lambda''=0} \frac{1}{c^2} \int_m^{\lambda'} \Re\left\{\frac{1}{i\pi} \varkappa_{11}(\lambda'+i\lambda'')\right\} d\lambda' = \lim_{\lambda''=0} \int_m^{\lambda'} \Re\left\{\frac{1}{i\pi} u(\lambda'+i\lambda'')\right\} d\lambda',$$

die allein durch $u(\lambda)$ bestimmt ist.

Nun entnehmen wir aus (10.) allgemein durch Vergleichung der Koeffizienten von $x_p \cdot x_q$:

$$\sigma_{pq}(\lambda') + \sum_{(\lambda_a<\lambda')} e_{pq}(\lambda_a) = \lim_{\lambda''=0} \int_m^{\lambda'} \Re\left\{\frac{1}{i\pi} \varkappa_{pq}(\lambda'+i\lambda'')\right\} d\lambda';$$

es genügt hier wie in der Folge nur solche λ' zu betrachten, die verschieden von allen λ_a sind. Nach (7.) wird das gleich

$$\lim_{\lambda''=0}\left[\int_m^{\lambda'} \Re|\pi_p(\lambda)\pi_q(\lambda)|\, \Re\left\{\frac{u(\lambda)}{i\pi}\right\} d\lambda' + \int_m^{\lambda'} \Re\left\{\frac{\pi_p(\lambda)\pi_q(\lambda)}{i\pi}\right\} \Re|u(\lambda)|\, d\lambda' + \int_m^{\lambda'} \Re\left\{\frac{g_{pq}(\lambda)}{i\pi}\right\} d\lambda'\right].$$

Wir betrachten die drei Summanden dieses Ausdruckes einzeln und

bemerken vorweg, daß $\pi_p(\lambda)\pi_q(\lambda)$ und $g_{pq}(\lambda)$ *reelle* Polynome in λ sind, ihre imaginären Teile — die im zweiten und dritten Integral auftreten — also die Form

$$\Re\left\{\frac{1}{i}\pi_p(\lambda)\pi_q(\lambda)\right\} = \lambda'' P(\lambda', \lambda''), \qquad \Re\left\{\frac{1}{i} g_{pq}(\lambda)\right\} = \lambda'' Q(\lambda', \lambda'')$$

haben, wo P, Q Polynome in λ', λ'' bedeuten. Daraus folgt bereits, daß der dritte Summand für $\lim \lambda'' = 0$ gegen 0 konvergiert.

Was den zweiten anlangt, so entnehmen wir aus (I^d.), indem wir $x_1 = \frac{1}{c}$, $x_2 = x_3 = \cdots = 0$ setzen:

$$\Re\{u(\lambda)\} = \frac{1}{c^2}\int_{(\mathfrak{S})} \frac{(\mu-\lambda')\,d\sigma_{11}(\mu)}{(\mu-\lambda')^2+\lambda''^2} + \frac{1}{c^2}\sum_{(\alpha)} \frac{(\lambda_\alpha-\lambda')\,e_{11}(\lambda_\alpha)}{(\lambda_\alpha-\lambda')^2+\lambda''^2};$$

vertauscht man alsdann die Folge der Integrationen nach λ' und μ bzw. die Folge der Integration nach λ' und der Summation nach α, so erhält man für den zweiten Summanden einen Ausdruck der Form

$$\int_{(\mathfrak{S})} \lambda'' \Phi(\mu, \lambda', \lambda'')\,d\sigma_{11}(\mu) + \sum_{(\alpha)} \lambda'' \Phi(\lambda_\alpha, \lambda', \lambda'')\,e_{11}(\lambda_\alpha).$$

Hierin bedeutet Φ eine Funktion seiner drei Argumente, die für $\lambda'' \neq 0$ endlich ist und deren Verhalten für gegen 0 konvergierendes λ'' man unter Einführung des Maximums des Polynoms $P(\lambda', \lambda'')$ leicht abschätzt: sie bleibt für alle Werte der ersten beiden Argumente, die in Betracht kommen, unterhalb $C \cdot |\log \lambda''|$, wo C eine Konstante bedeutet. Mit λ'' multipliziert, konvergiert sie also gleichmäßig gegen Null, so daß schließlich auch der Limes des zweiten Summanden verschwindet.

Den ersten Summanden endlich schreiben wir als *Stieltjes*sches Integral

$$\int_m^{\lambda'} \Re|\pi_p(\lambda'+i\lambda'')\pi_q(\lambda'+i\lambda'')|\,df(\lambda'; \lambda''),$$

wo die monotone Funktion von λ'

$$f(\lambda'; \lambda'') = \int_m^{\lambda'} \Re\left\{\frac{1}{i\pi} u(\lambda'+i\lambda'')\right\} d\lambda'$$

für $\lim \lambda'' = 0$ nach (11.) gegen $\varrho(\lambda')$ konvergiert. Nach einem leicht zu beweisenden Hilfssatz*) ist aber unter dieser Voraussetzung notwendig

$$\lim_{\lambda''=0} \int_m^{\lambda'} u(\lambda'; \lambda'')\,df(\lambda'; \lambda'') = \int_m^{\lambda'} u(\lambda')\,d\varrho(\lambda'),$$

---

*) Ein im wesentlichen gleichbedeutender Hilfssatz ist zu analogem Zwecke angewendet bei *Hellinger*, Quadr. Formen, Kap. III, § 9 (S. 269).

wenn die stetigen Funktionen $u(\lambda';\lambda'')$ von λ' mit abnehmendem λ'' gleichmäßig gegen $u(\lambda')$ konvergieren. Da der reelle Teil des reellen Polynoms $\pi_p(\lambda)\pi_q(\lambda)$ gleichmäßig gegen $\pi_p(\lambda')\pi_q(\lambda')$ konvergiert, erhalten wir daher endlich als Limes des ersten Summanden unseres Ausdruckes und damit der ganzen dreigliedrigen Summe:

$$(12.) \qquad \sigma_{pq}(\lambda') + \sum_{(\lambda_\alpha < \lambda')} e_{pq}(\lambda_\alpha) = \int_m^{\lambda'} \pi_p(\lambda')\pi_q(\lambda')\, d\varrho(\lambda') \qquad (\lambda' \neq \lambda_\alpha).$$

Hieraus lassen sich aber unmittelbar Ausdrücke entnehmen, die $\sigma_{pq}(\lambda')$ und jedes einzelne $e_{pq}(\lambda_\alpha)$ für sich durch die $\pi_p(\lambda)$ und $\varrho(\lambda)$ bestimmen. Die Funktion linkerhand ist, wie oben für (10.) ausgeführt, an allen Stellen $\lambda' \neq \lambda_\alpha$ stetig und besitzt an jeder Stelle λ_α den Sprung $e_{pq}(\lambda_\alpha)$; wir erhalten also:

$$e_{pq}(\lambda_\alpha) = \lim_{\varepsilon=0} \int_{\lambda_\alpha-\varepsilon}^{\lambda_\alpha+\varepsilon} \pi_p(\lambda')\pi_q(\lambda')\, d\varrho(\lambda').$$

Nun sind die λ_α gerade auch die Sprungstellen der monotonen Funktion $\varrho(\lambda')$; setzen wir deren Sprung daselbst

$$(13.) \qquad \Delta_\alpha \varrho = \varrho(\lambda_\alpha + 0) - \varrho(\lambda_\alpha - 0) = \delta_\alpha,$$

so ergibt die letzte Formel unter Anwendung des Mittelwertsatzes:

$$(12^a.) \qquad e_{pq}(\lambda_\alpha) = \pi_p(\lambda_\alpha)\pi_q(\lambda_\alpha)\delta_\alpha,$$

d. h. $e(\lambda_\alpha; x)$ ist das Quadrat *einer* (notwendig beschränkten) Linearform

$$e(\lambda_\alpha; x) = \Big(\sum_{(p)} \pi_p(\lambda_\alpha)\sqrt{\delta_\alpha}\, x_p\Big)^2;$$

jedes λ_α ist also ein *einfacher* Eigenwert, $\sum_{(p)} \pi_p(\lambda_\alpha)\sqrt{\delta_\alpha}x_p$ die zugehörige normierte Eigenform. Insbesondere konvergiert also

$$\sum_{(p)} \pi_p(\lambda_\alpha)^2 = \frac{1}{\delta_\alpha},$$

und die λ_α sind die einzigen Stellen, für die die Quadratsumme der Polynomwerte $\pi_p(\lambda)$ konvergiert. Daß $\delta_\alpha = 0$, d. h. λ_α Stetigkeitsstelle von $\varrho(\lambda)$ ist, kann nicht vorkommen, da dann nach $(12^a.)$ alle $e_{pq}(\lambda_\alpha)$ verschwinden müßten, und also λ_α kein Eigenwert wäre.

Indem wir ferner von $\varrho(\lambda')$ die Summe aller links von λ' gelegenen Sprünge abziehen, erhalten wir nach Beseitigung der hebbaren Unstetigkeiten an den Stellen λ_α eine *stetige* monotone Funktion $\varrho^*(\lambda')$ (den „stetigen Bestandteil" von $\varrho(\lambda')$); es ist

$$(13'.) \qquad \varrho^*(\lambda') = \varrho(\lambda') - \sum_{(\lambda_\alpha < \lambda')} \delta_\alpha \qquad (\lambda' \neq \lambda_\alpha),$$

und es gilt dann bekanntlich für jede stetige Funktion $u(\lambda')$

$$(14.) \qquad \int_m^M u(\lambda')\,d\varrho(\lambda') = \int_m^M u(\lambda')\,d\varrho^*(\lambda') + \sum_{(a)} u(\lambda_a)\,\delta_a .$$

Daher folgt aus (12.) und (12ª.)

$$(12^b.) \qquad \sigma_{pq}(\lambda') = \int_m^{\lambda'} \pi_p(\lambda')\,\pi_q(\lambda')\,d\varrho^*(\lambda'),$$

d. h. $\sigma(\lambda'; x)$ ist das Integral des Quadrates *eines* Systemes beschränkter Differentialformen

$$(12^c.) \quad \sigma(\lambda'; x) = \int_m^{\lambda'} \frac{(d\sum_{(p)} \tau_p^*(\lambda')\,x_p)^2}{d\varrho^*(\lambda')}, \quad \text{wo} \quad \tau_p^*(\lambda') = \int_m^{\lambda'} \pi_p(\lambda')\,d\varrho^*(\lambda');$$

das Streckenspektrum ist also *einfach* und ist durch die Basisfunktion $\varrho^*(\lambda')$ bestimmt, und $\sum_{(p)} \tau_p^*(\lambda')\,x_p$ ist das zugehörige System in bezug auf $\varrho^*(\lambda')$ normierter Eigendifferentialformen.

Das gesamte Spektrum der J-Form ist also durch die monotone Funktion $\varrho(\lambda)$ vollkommen bestimmt, und zwar besteht das Punktspektrum aus ihren Sprungstellen, das Streckenspektrum aus den Stellen, in deren Umgebung sie *stetig*, d. h. um mehr als die Summe ihrer Sprünge wächst (d. s. eben die Punkte, in deren Umgebung $\varrho^*(\lambda)$ wächst).

Durch Einsetzen von (12ª.), (12ᵇ.) in (I.) folgt weiterhin für die Koeffizienten der J-Form die Darstellung:

$$(15.) \qquad \begin{aligned} k_{pq} &= \int_{(\mathfrak{S})} \mu\,\pi_p(\mu)\,\pi_q(\mu)\,d\varrho^*(\mu) + \sum_{(\alpha)} \lambda_\alpha \pi_p(\lambda_\alpha)\,\pi_q(\lambda_\alpha)\,\delta_\alpha \\ &= \int_{(\mathfrak{S})} \mu\,\pi_p(\mu)\,\pi_q(\mu)\,d\varrho(\mu) = \begin{cases} a_p & (p = q) \\ -b_p & (|p-q| = 1) \\ 0 & (|p-q| > 1), \end{cases} \end{aligned}$$

und analoge Formeln folgen aus (Iᵈ.) für die Koeffizienten der Resolvente $\mathsf{K}(\lambda; x)$; unter ihnen sei nur die für den ersten Koeffizienten hervorgehoben:

$$(16.) \qquad u(\lambda) = \frac{1}{c^2}\varkappa_{11}(\lambda) = \int_{(\mathfrak{S})} \frac{d\varrho^*(\mu)}{\mu - \lambda} + \sum_{(a)} \frac{\delta_a}{\lambda_a - \lambda} = \int_{(\mathfrak{S})} \frac{d\varrho(\mu)}{\mu - \lambda},$$

die gewissermaßen die Umkehrung der Relation (11.) zwischen $\varrho(\mu)$ und $u(\lambda)$ ist. Beide Formeln zeigen, daß das Spektrum der J-Form aus den Grenzstellen des Definitionsbereiches der eindeutigen analytischen Funktion $u(\lambda)$ besteht: isolierte singuläre Stellen (die notwendig einfache Pole sein müssen) sind isolierte Eigenwerte; überhaupt erschöpfen alle Stellen λ', für die sich $\lambda'' u(\lambda' + i\lambda'')$ mit gegen 0 konvergierendem λ'' einem von 0 verschiedenen

(notwendig endlichen) Grenzwert nähert*), die Gesamtheit der Eigenwerte, und endlich bildet die Gesamtheit der übrigen Grenzstellen, die in hier nicht näher zu erörternder Weise aus wesentlich singulären Linien und Verzweigungslinien besteht, das Streckenspektrum. — Übrigens entnehmen wir der Formel (16.) noch das folgende den Satz I ergänzende Kettenbruchtheorem:

Satz II: *Jeder Kettenbruch* $\frac{1}{|a_1-\lambda|}-\frac{b_1^2}{|a_2-\lambda|}-\cdots$, *für den alle* a_p, b_p *zwischen endlichen Grenzen* m, M *liegen, läßt sich in seinem durch Satz I bestimmten Konvergenzgebiet durch ein Stieltjessches Integral mit Hilfe einer durch* (11.) *festgelegten monotonen Funktion* $\varrho(\mu)$ *darstellen:*

$$\frac{1}{|a_1-\lambda|}-\frac{b_1^2}{|a_2-\lambda|}-\frac{b_2^2}{|a_3-\lambda|}-\cdots=\int_m^M\frac{d\varrho(\mu)}{\mu-\lambda}.$$

Endlich stellen wir noch die aus (I^b.) mit Hilfe von (12^a.), (12^b.) folgenden Relationen auf:

$$(17.)\quad e_{pq}=\int_{(\mathfrak{S})}\pi_p(\mu)\,\pi_q(\mu)\,d\varrho^*(\mu)+\sum_{(a)}\pi_p(\lambda_a)\,\pi_q(\lambda_a)\,\delta_a=\int_{(\mathfrak{S})}\pi_p(\mu)\,\pi_q(\mu)\,d\varrho(\mu)=\begin{cases}0 & (p\neq q)\\ 1 & (p=q),\end{cases}$$

d. h. die Polynome $\pi_p(\mu)$ sind im Sinne dieser Relationen „orthogonal in bezug auf die monotone Funktion $\varrho(\mu)$ als Basis", oder, wie man auch sagen kann, „orthogonal mit dem Gewicht $\frac{d\varrho(\mu)}{d\mu}$", falls ϱ stetig differenzierbar ist; es sind eben die in der Einleitung bereits erwähnten Polynome, die — unter der letztgenannten Annahme — *P. Tschebyscheff* und *E. Heine* in ihrer Definition als Näherungsnenner des Kettenbruches für (16.) und *G. Darboux* von den Orthogonalitätsrelationen (17.) ausgehend behandelt haben.

Die wesentlichen damit abgeleiteten Eigenschaften der J-Formen fassen wir zusammen in

Satz III: *Eine beschränkte* J*-Form besitzt ein einfaches Strecken- und ein einfaches Punktspektrum, die insgesamt identisch sind mit den Grenzstellen des Definitionsbereiches der durch den zugehörigen Kettenbruch* $u(\lambda)$ *(d. i. der erste Koeffizient der Resolvente der Form) bestimmten analytischen Funktion der komplexen Veränderlichen* λ*, oder identisch mit der Gesamtheit der Stellen, in deren Umgebung eine nach* (11.) *aus den Randwerten von* $u(\lambda)$ *längs der reellen Achse gebildete monotone Funktion* $\varrho(\mu)$ *nicht konstant ist.* $\varrho(\mu)$ *ist durch* $J(x)$ *bis auf einen willkürlichen konstanten Faktor bestimmt*

*) Vgl. *Hilbert*, Integralgleichungen IV, Kap. XI, Formel (68.) (S. 140 der Buchausgabe).

und möge als „charakteristische Funktion" von $J(x)$ bezeichnet werden. Die Polynome $\pi_p(\lambda)$, die durch die zu $J(x) - \lambda E(x)$ gehörigen homogenen Gleichungen bis auf einen konstanten Faktor bestimmt sind und die ein Orthogonalsystem in bezug auf $\varrho(\mu)$ als Basis bilden, geben durch ihre Werte an den Stellen des Punktspektrums die zugehörigen Eigenformen, durch ihre Integrale $\int_m^\mu \pi_p(\mu)\, d\varrho^*(\mu)$ nach dem stetigen Bestandteil $\varrho^*(\mu)$ von $\varrho(\mu)$ die zum Streckenspektrum gehörigen Eigendifferentialformen; die Koeffizienten der J-Form lassen sich in der Integralgestalt (15.) *durch diese Polynome $\pi_p(\lambda)$ und $\varrho(\lambda)$ darstellen.*

§ 2. Formen mit einfachem Streckenspektrum.

1. Wir gehen jetzt umgekehrt von beliebigen reellen beschränkten Formen mit einfachem Spektrum aus und untersuchen sie auf ihre Transformierbarkeit in J-Formen. Der Einfachheit halber beginnen wir mit der Behandlung von *Formen ohne Punktspektrum;* eine solche Form, deren einfaches Streckenspektrum durch die stetige monotone Basisfunktion $\varrho(\lambda)$ bestimmt ist — λ bedeutet fortan eine reelle Veränderliche — ist in ihrer kanonischen Integraldarstellung (III.) gegeben durch

$$(18.)\qquad K(x) = \sum_{(p,q)} k_{pq} x_p x_q = \int_{(\mathfrak{S})} \lambda \frac{(d\sum_{(p)} \varrho_p(\lambda) x_p)^2}{d\varrho(\lambda)} \quad \text{oder} \quad k_{pq} = \int_{(\mathfrak{S})} \lambda \frac{d\varrho_p(\lambda) d\varrho_q(\lambda)}{d\varrho(\lambda)},$$

wobei gemäß (III^a.)

$$(19.)\qquad E(x) = \sum_{(p)} x_p^2 = \int_{(\mathfrak{S})} \frac{(d\sum_{(p)} \varrho_p(\lambda) x_p)^2}{d\varrho(\lambda)} \quad \text{oder} \quad e_{pq} = \int_{(\mathfrak{S})} \frac{d\varrho_p(\lambda) d\varrho_q(\lambda)}{d\varrho(\lambda)}$$

ist. Die Eigenschaft, die die Linearformen $\sum_{(p)} \varrho_p(\lambda) x_p$ als ein zur Basis $\varrho(\lambda)$ gehöriges System orthogonaler linearer Differentialformen charakterisiert, ist die, daß die Differenzen $\Delta_1 \varrho_p(\lambda)$, $\Delta_2 \varrho_p(\lambda)$, $\Delta_1 \varrho(\lambda)$ der Funktionswerte an den Enden der Intervalle Δ_1, Δ_2 der reellen λ-Achse den Relationen

$$(20.)\qquad \sum_{(p)} \Delta_1 \varrho_p(\lambda)\, \Delta_2 \varrho_p(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \Delta_1, \Delta_2 \text{ getrennt liegen,} \\ \Delta_1 \varrho(\lambda), & \text{wenn } \Delta_1, \Delta_2 \text{ identisch sind,} \end{cases}$$

genügen; mit dieser Bedingung äquivalent ist die Integralidentität

$$(20'.)\qquad \sum_{(p)} \int_{(\mathfrak{S})} \frac{df(\lambda) d\varrho_p(\lambda)}{d\varrho(\lambda)} \int_{(\mathfrak{S})} \frac{dg(\lambda) d\varrho_p(\lambda)}{d\varrho(\lambda)} = \int_{(\mathfrak{S})} \frac{df(\lambda) dg(\lambda)}{d\varrho(\lambda)},$$

die für je zwei stetige Funktionen $f(\lambda), g(\lambda)$ bestehen soll, für die nur $\int \frac{(df(\lambda))^2}{d\varrho(\lambda)}, \int \frac{(dg(\lambda))^2}{d\varrho(\lambda)}$ existieren*).

*) *Hellinger*, Quadrat. Formen, Kap. II, § 6.

Es ist bekannt, daß man $K(x)$ durch orthogonale Transformation der Variablen derart umformen kann, daß anstatt $\sum_{(p)} \varrho_p(\lambda) x_p$ ein beliebiges anderes zu derselben Basisfunktion $\varrho(\lambda)$ gehöriges System orthogonaler Differentialformen $\sum_{(p)} \tau_p(\lambda) \bar{x}_p$ auftritt*); bemerken wir, daß das in der Darstellung (15.) der J-Form auftretende Orthogonalsystem nach (12^c.) für den Fall, daß kein Punktspektrum vorhanden ist, durch die Integrale $\int_m^\lambda \pi_p(\lambda)\, d\varrho(\lambda)$ eines in bezug auf die Basisfunktion des Streckenspektrums orthogonalen Polynomsystems konstituiert wird, so ist der Weg der weiteren Untersuchung gewiesen: es ist erstens zu unserm $\varrho(\lambda)$ ein solches System von Polynomen zu bilden (Nr. 2) und dann die von $\varrho(\lambda)$ zu ihm führende Orthogonaltransformation auf $K(x)$ anzuwenden (Nr. 3).

2. Die Polynome $\pi_p(\lambda)$ sind als Polynome $(p-1)$-ten Grades $(p = 1, 2, \ldots)$ durch die Orthogonalitätsrelationen

$$(21.) \qquad \int_m^M \pi_p(\lambda)\, \pi_q(\lambda)\, d\varrho(\lambda) = e_{pq} = \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ 1 & (p = q) \end{cases}$$

sukzessive vollständig bestimmt; durch die Anwendung des bekannten Orthogonalisierungsverfahrens**) auf die Potenzen $\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \ldots$ ergeben sich für sie die Rekursionsformeln:

$$\pi_1(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\int_m^M d\varrho(\lambda)}},$$

$$(22.) \quad \pi_2(\lambda) = \frac{\lambda - \pi_1(\lambda) \int_m^M \lambda\, \pi_1(\lambda)\, d\varrho(\lambda)}{\sqrt{\int_m^M \Big(\lambda - \pi_1(\lambda) \int_m^M \lambda\, \pi_1(\lambda)\, d\varrho(\lambda)\Big)^2 d\varrho(\lambda)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\pi_p(\lambda) = \frac{\lambda^{p-1} - \sum_{\nu=1}^{p-1} \pi_\nu(\lambda) \int_m^M \lambda^{p-1}\, \pi_\nu(\lambda)\, d\varrho(\lambda)}{\sqrt{\int_m^M \Big(\lambda^{p-1} - \sum_{\nu=1}^{p-1} \pi_\nu(\lambda) \int_m^M \lambda^{p-1}\, \pi_\nu(\lambda)\, d\varrho(\lambda)\Big)^2 d\varrho(\lambda)}}. \quad (p = 1, 2, \ldots)$$

Keiner der hier auftretenden Nenner verschwindet, da unter der Quadrat-

*) Vgl. *Hellinger*, Orthogonalinvarianten, § 9, Satz IV.

**) Vgl. *Erh. Schmidt*, Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener (Dissert. 1905 = Math. Ann. 63, S. 433), § 3.

wurzel ein Integral $\int_m^M u(\lambda)d\varrho(\lambda)$ steht, wo $\varrho(\lambda)$ stetig und nicht konstant ist, und $u(\lambda)$ ein positives Polynom genau $(2p-2)$-ten Grades, also mit Ausnahme endlichvieler Stellen positiv und von Null verschieden ist. Auch umgekehrt läßt sich hiernach jede λ-Potenz λ^{p-1} als lineares Aggregat von $\pi_1(\lambda), \ldots \pi_p(\lambda)$ darstellen.

Es ist nun zu zeigen, daß die unbestimmten Integrale

$$\tau_p(\lambda) = \int_m^\lambda \pi_p(\lambda)d\varrho(\lambda) \tag{23.}$$

ein System orthogonaler Differentialformen mit der Basis $\varrho(\lambda)$ bilden. Zu diesem Ende*) stellen wir zunächst in bekannter Weise durch Ausrechnen des sicher nicht negativen Integrales

$$\int_{-M}^{+M}\left\{\varphi(\lambda) - \sum_{p=1}^{n}\pi_p(\lambda)\int_m^M \varphi(\lambda)\pi_p(\lambda)d\varrho(\lambda)\right\}^2 d\varrho(\lambda)$$

die für jede integrable Funktion $\varphi(\lambda)$ geltende sogenannte „*Bessel*sche Ungleichung"

$$\sum_{(p)}\left\{\int_m^M \varphi(\lambda)\pi_p(\lambda)d\varrho(\lambda)\right\}^2 \leqq \int_m^M \varphi(\lambda)^2 d\varrho(\lambda) \tag{24.}$$

her; ist $\varphi(\lambda)$ speziell ein Aggregat endlichvieler Polynome $\pi_p(\lambda)$ (d. h. ein beliebiges Polynom in λ)

$$\varphi_n(\lambda) = \sum_{p=1}^{n} c_p\pi_p(\lambda),$$

so bestätigt man durch direktes Ausrechnen das Stattfinden der *Gleichung*

$$\sum_{(p)}\left\{\int_m^M \varphi_n(\lambda)\pi_p(\lambda)d\varrho(\lambda)\right\}^2 = \int_m^M \varphi_n(\lambda)^2 d\varrho(\lambda), \tag{25.}$$

wobei links nur die ersten n Summanden nicht verschwinden. Nun läßt sich jede stetige Funktion von λ im Intervall (m, M) bekanntlich durch Polynome $\varphi_n(\lambda)$ gleichmäßig approximieren; dasselbe gilt für jede abteilungsweise stetige Funktion $\varphi(\lambda)$ in jedem Gebiete, das durch Ausschluß kleiner die Sprungstellen enthaltender Intervalle entsteht, und in Anbetracht der Stetigkeit von $\varrho(\lambda)$ kann man daher jedenfalls den in bezug auf $\varrho(\lambda)$ bestimmten mittleren Fehler $\int_m^M (\varphi(\lambda) - \varphi_n(\lambda))^2 d\varrho(\lambda)$ beliebig klein machen. Infolgedessen ergibt sich aber durch Anwendung der *Schwarz*schen Ungleichung, daß auch die Differenzen

$$\Big\{\int_m^M \varphi(\lambda)^2 d\varrho(\lambda) - \int_m^M \varphi_n(\lambda)^2 d\varrho(\lambda)\Big\}^2 = \Big\{\int_m^M [\varphi(\lambda)-\varphi_n(\lambda)][\varphi(\lambda)+\varphi_n(\lambda)]\,d\varrho(\lambda)\Big\}^2$$
$$\leqq \int_m^M [\varphi(\lambda)-\varphi_n(\lambda)]^2 d\varrho(\lambda) \int_m^M [\varphi(\lambda)+\varphi_n(\lambda)]^2 d\varrho(\lambda)$$

und ebenso — unter Benutzung von (24.) —

$$\Big\{\sum_{(p)}\Big(\int_m^M \varphi(\lambda)\pi_p(\lambda)d\varrho(\lambda)\Big)^2 - \sum_{(p)}\Big(\int_m^M \varphi_n(\lambda)\pi_p(\lambda)d\varrho(\lambda)\Big)^2\Big\}^2$$
$$= \Big\{\sum_{(p)} \int_m^M [\varphi(\lambda)-\varphi_n(\lambda)]\pi_p(\lambda)d\varrho(\lambda) \int_m^M [\varphi(\lambda)+\varphi_n(\lambda)]\pi_p(\lambda)d\varrho(\lambda)\Big\}^2$$
$$\leqq \sum_{(p)}\Big\{\int_m^M [\varphi(\lambda)-\varphi_n(\lambda)]\pi_p(\lambda)d\varrho(\lambda)\Big\}^2 \sum_{(p)}\Big\{\int_m^M [\varphi(\lambda)+\varphi_n(\lambda)]\pi_p(\lambda)d\varrho(\lambda)\Big\}^2$$
$$\leqq \sum_{(p)} \int_m^M [\varphi(\lambda)-\varphi_n(\lambda)]^2 d\varrho(\lambda) \int_m^M [\varphi(\lambda)+\varphi_n(\lambda)]^2 d\varrho(\lambda)$$

beliebig klein werden, und daher folgt aus (25.) nun auch für jedes abteilungsweise stetige $\varphi(\lambda)$ die „Vollständigkeitsrelation“*):

$$(25'.) \qquad \sum_{(p)}\Big\{\int_m^M \varphi(\lambda)\pi_p(\lambda)\,d\varrho(\lambda)\Big\}^2 = \int_m^M \varphi(\lambda)^2 d\varrho(\lambda).$$

Setzt man hierin $\varphi(\lambda)$ in einem Intervall Δ_1 gleich einer Konstanten u, in einem andern getrennt liegenden Δ_2 gleich v und sonst überall gleich Null, so entsteht eine Identität zwischen zwei quadratischen Formen in u, v, aus der durch Gleichsetzen der Koeffizienten von u^2 und uv folgt:

$$(26.) \qquad \sum_{(p)} (\Delta_1 \tau_p(\lambda))^2 = \Delta_1 \varrho(\lambda); \quad \sum_{(p)} \Delta_1 \tau_p(\lambda)\, \Delta_2 \tau_p(\lambda) = 0,$$

und das gerade enthält die Behauptung. Die mit (26.) äquivalente Integralidentität von der Art (20′.) schreibt sich wegen der Existenz des Differentialquotienten $\frac{d\tau_p}{d\varrho} = \pi_p(\lambda)$ einfacher**):

$$(26'.) \qquad \sum_{(p)} \int_m^M \pi_p(\lambda)\, df(\lambda) \int_m^M \pi_p(\lambda)\, dg(\lambda) = \int_m^M \frac{df\,dg}{d\varrho},$$

für alle Funktionen $f(\lambda), g(\lambda)$, für die nur $\int \frac{df^2}{d\varrho}, \int \frac{dg^2}{d\varrho}$ existiert.

3. Wir können nun die gewünschte orthogonale Transformation unserer Form $K(x)$ explizit in der Gestalt

$$(27.) \qquad x_p = \sum_{(q)} o_{pq}\bar{x}_q, \quad \text{wo} \quad o_{pq} = \int_m^M \pi_q(\lambda)\, d\varrho_p(\lambda),$$

---

*) Diese Relation hat zu anderm Zwecke Herr *W. Stekloff*, (dieses Journ. Bd. 125 [1903], S. 207) bewiesen; der Beweis konnte hier durch Benutzung der *Schwarz*schen Ungleichung etwas kürzer gehalten werden. Vgl. übrigens *Hilbert*, Integralgl. V, Kap. XIII = Buchausg., S. 177 ff.

**) Vgl. *Hellinger*, Orthogonalinvarianten, § 5, S. 29, 31.

angeben. Denn zunächst haben wir dann wegen (26′.) und (19.)

$$\sum_{(a)} o_{pa}\, o_{qa} = \sum_{(a)} \int_m^M \pi_a(\lambda)\, d\varrho_p(\lambda) \int_m^M \pi_a(\lambda)\, d\varrho_q(\lambda) = \int_m^M \frac{d\varrho_p(\lambda)\, d\varrho_q(\lambda)}{d\varrho(\lambda)} = e_{pq},$$

und andererseits ist wegen (20′.) und (21.)

$$\sum_{(a)} o_{ap}\, o_{aq} = \sum_{(a)} \int_m^M \pi_p(\lambda)\, d\varrho_a(\lambda) \int_m^M \pi_q(\lambda)\, d\varrho_a(\lambda) = \int_m^M \pi_p(\lambda)\, \pi_q(\lambda)\, d\varrho(\lambda) = e_{pq};$$

also ist (27.) in der Tat eine eindeutig umkehrbare orthogonale Transformation, und es ist

$$(27'.) \qquad \bar{x}_q = \sum_{(p)} o_{pq}\, x_p$$

ihre Inverse. Führen wir nun in der Integraldarstellung (18.) von $K(x)$ diese Transformation aus, so wird

$$\sum_{(p)} \varrho_p(\lambda)\, x_p = \sum_{(q)} \bar{x}_q \sum_{(p)} \varrho_p(\lambda) \int_m^M \pi_q(\lambda)\, d\varrho_p(\lambda),$$

(denn diese Umordnung der Doppelreihe ist auf Grund bekannter Sätze über das Rechnen mit beschränkten Formen erlaubt*)) und unter Benutzung von (20′.) mit passend spezialisiertem f und g geht das über in

$$\sum_{(q)} \bar{x}_q \int_m^\lambda \pi_q(\lambda)\, d\varrho(\lambda) = \sum_{(q)} \bar{x}_q\, \tau_q(\lambda).$$

Daher wird die transformierte Form

$$(28.) \qquad K(x) = \bar{K}(\bar{x}) = \sum_{(p,q)} \bar{k}_{pq}\, \bar{x}_p\, \bar{x}_q = \int_{(\mathfrak{S})} \lambda \frac{\left(d \sum_{(p)} \tau_p(\lambda)\, \bar{x}_p\right)^2}{d\varrho(\lambda)}, \quad \text{wo}$$

$$(28^a.) \qquad \bar{k}_{pq} = \int_{(\mathfrak{S})} \lambda \frac{d\tau_p(\lambda)\, d\tau_q(\lambda)}{d\varrho(\lambda)} = \int_{(\mathfrak{S})} \lambda\, \pi_p(\lambda)\, \pi_q(\lambda)\, d\varrho(\lambda).$$

Nun ist $\lambda \cdot \pi_p(\lambda)$ ein Polynom genau p-ten Grades, also als lineare Kombination von $\pi_1(\lambda), \ldots \pi_{p+1}(\lambda)$ mit konstanten Koeffizienten darstellbar; wegen der Orthogonalitätsrelationen (21.) ist also

$$\bar{k}_{pq} = \int_{\mathfrak{S}} [\lambda \pi_p(\lambda)]\, \pi_q(\lambda)\, d\varrho(\lambda) = 0, \quad \text{wenn } q \geqq p+2,$$

und ebenso wegen der Symmetrie von $\bar{k}_{pq}$ in p und q:

$$\bar{k}_{pq} = 0, \quad \text{wenn} \quad q \leqq p-2.$$

Also sind alle Koeffizienten außer

$$(29.)\ \bar{k}_{pp} = \int_{(\mathfrak{S})} \lambda\, \pi_p(\lambda)^2\, d\varrho(\lambda) = a_p, \quad \bar{k}_{p,p+1} = \int_{(\mathfrak{S})} \lambda\, \pi_p(\lambda)\, \pi_{p+1}(\lambda)\, d\varrho(\lambda) = -b_p$$

gewiß gleich Null, und $\bar{K}(\bar{x})$ *ist daher tatsächlich eine J-Form*, wofern noch alle $b_p \neq 0$ sind.

*) Vgl. *Hellinger-Toeplitz*, Grundlagen, § 2, Satz 4 (S. 299).

Die homogenen Gleichungen (IV.), denen die Differentialeigenformen genügen müssen, lauten hier, wie sich übrigens auch direkt aus (29.) und der Identität (26′.) entnehmen läßt:

$$-b_{p-1}\int_{\lambda_1}^{\lambda}\pi_{p-1}(\lambda)\,d\varrho(\lambda)+a_p\int_{\lambda_1}^{\lambda}\pi_p(\lambda)\,d\varrho(\lambda)-b_p\int_{\lambda_1}^{\lambda}\pi_{p+1}(\lambda)\,d\varrho(\lambda)-\int_{\lambda_1}^{\lambda}\lambda\pi_p(\lambda)\,d\varrho(\lambda)=0,$$

$$(b_0=0). \qquad (p=1,2,\ldots)$$

Dividiert man durch $\varrho(\lambda)-\varrho(\lambda_1)$ und läßt nach Anwendung des Mittelwertsatzes auf die einzelnen Integrale λ_1 gegen λ konvergieren, so erhält man

$$(30.) \qquad -b_{p-1}\pi_{p-1}(\lambda)+(a_p-\lambda)\,\pi_p(\lambda)-b_p\pi_{p+1}(\lambda)=0; \qquad (p=1,2,\ldots)$$

das sind genau die *Rekursionsformeln* (2.) *für die Polynome* $\pi_p(\lambda)$, die in § 1 den Ausgangspunkt für ihre Definition bildeten. Übrigens folgt jetzt aus (30.)

$$b_p \neq 0, \qquad (p=1,2,\ldots)$$

da sonst in (30.) nur ein (von $\lambda\cdot\pi_p(\lambda)$ herrührender) Term p-ter Dimension in λ mit von Null verschiedenem Koeffizienten auftreten würde. Wir haben damit vollständig das Resultat gewonnen:

Satz IV: *Jede beschränkte quadratische Form mit einfachem Streckenspektrum läßt sich orthogonal in eine J-Form transformieren.*

§ 3. Formen mit einfachem Punkt- und Streckenspektrum.

1. Wir haben nun endlich diese Betrachtungen auszudehnen auf die allgemeinsten beschränkten quadratischen Formen, die gemäß Satz III überhaupt in eine J-Form transformierbar sein könnten, solche nämlich, *die neben dem einfachen Streckenspektrum* $\mathfrak{S}$ *noch beliebig — event. auch innerhalb des Streckenspektrums — gelegene einfache Punkteigenwerte* λ_a *besitzen.* Die kanonische Darstellung einer solchen Form ist nach (III.):

$$(31.) \qquad K(x)=\sum_{(p,q)}k_{pq}x_px_q=\int_{(\mathfrak{S})}\lambda\frac{(d\sum_{(p)}\varrho_p^*(\lambda)x_p)^2}{d\varrho^*(\lambda)}+\sum_{(a)}\lambda_a(\sum_{(p)}l_{ap}x_p)^2,$$

während gemäß (III^a.):

$$(32.) \qquad E(x)=\sum_{(p)}x_p^2=\int_{(\mathfrak{S})}\frac{(d\sum_{(p)}\varrho_p^*(\lambda)x_p)^2}{d\varrho^*(\lambda)}+\sum_{(a)}(\sum_{(p)}l_{ap}x_p)^2;$$

hier ist $\varrho^*(\lambda)$ die das Streckenspektrum bestimmende stetige monotone Basisfunktion, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sind die durchweg voneinander verschiedenen, sämtlich im Intervalle (m, M) gelegenen Eigenwerte, und die zu $\varrho^*(\lambda)$ als Basis gehörigen orthogonalen Differentialformen $\sum_{(p)}\varrho_p^*(\lambda)x_p$ bzw. die be-

schränkten orthogonalen Linearformen $\sum_{(p)} l_{ap} x_p$ genügen den Relationen*)

$$(33^{a}.) \quad \sum_{(p)} \Delta_1 \varrho_p^*(\lambda)\, \Delta_2 \varrho_p^*(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \Delta_1, \Delta_2 \text{ getrennt liegen,} \\ \Delta_1 \varrho^*(\lambda), & \text{wenn } \Delta_1, \Delta_2 \text{ identisch sind;} \end{cases}$$

$$(33^{b}.) \quad \sum_{(p)} l_{ap}\, \Delta \varrho_p^*(\lambda) = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots)$$

$$(33^{c}.) \quad \sum_{(p)} l_{ap} l_{\beta p} = \begin{cases} 0 & (\alpha \neq \beta) \\ 1 & (\alpha = \beta). \end{cases} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots)$$

Wir können nun in diesem Falle formal in völliger Analogie zu § 2 vorgehen, indem wir zunächst (31.) in ein einziges Integral von der Gestalt (18.) umschreiben. Zu diesem Ende führen wir an Stelle der stetigen Basisfunktion $\varrho^*(\lambda)$ eine unstetige monotone Funktion ein, die genau dieselbe Rolle spielt, wie die „charakteristische Funktion" der J-Form in § 1; sie markiert durch ihre Sprünge die Eigenwerte und hat $\varrho^*(\lambda)$ zum stetigen Bestandteil. Bezeichnen δ_α endlich- oder abzählbar unendlichviele beliebige positive Zahlen, die den λ_α eineindeutig zugeordnet sind und nur der einen Bedingung genügen, daß die Reihe $\sum_{(\alpha)} \delta_\alpha$ konvergiert, so setzen wir

$$(34.) \qquad \varrho(\lambda) = \varrho^*(\lambda) + \sum_{(\lambda_\alpha < \lambda)} \delta_\alpha \qquad (\lambda \neq \lambda_\alpha),$$

wo in die Summe alle δ_α eingehen, die links von λ gelegenen Eigenwerten λ_α zugeordnet sind. So ist für alle von den λ_α verschiedenen Stellen eine monotone Funktion definiert. Wie man diese Definition an den Stellen λ_α ergänzt, ist für das folgende unwesentlich; jedenfalls differieren die beiderseitigen Grenzwerte an einer Stelle λ_α um (das Symbol Δ_{λ_α} soll allgemein den Sprung an der Stelle λ_α bezeichnen):

$$(34'.) \qquad \Delta_{\lambda_\alpha} \varrho = \lim_{\lambda = \lambda_\alpha + 0} \varrho(\lambda) - \lim_{\lambda = \lambda_\alpha - 0} \varrho(\lambda) = \delta_\alpha.$$

Wir fassen nun analog die Funktionen $\varrho_p^*(\lambda)$ und die Zahlen l_{ap} zusammen zu unstetigen Funktionen beschränkter Schwankung

$$(35.) \qquad \varrho_p(\lambda) = \varrho_p^*(\lambda) + \sum_{(\lambda_\alpha < \lambda)} l_{ap} \sqrt{\delta_\alpha} \qquad (\lambda \neq \lambda_\alpha);$$

dann ist

$$\sum_{(p)} \varrho_p(\lambda) x_p = \sum_{(p)} \varrho_p^*(\lambda) x_p + \sum_{(\lambda_\alpha < \lambda)} \left(\sum_{(p)} l_{ap} x_p\right) \sqrt{\delta_\alpha}$$

für jedes λ eine beschränkte Linearform, weil der zweite Summand nach der *Schwarz*schen Ungleichung unter Berücksichtigung von (32.) unterhalb $\sqrt{E(x) \cdot \sum_{(\alpha)} \delta_\alpha}$ bleibt. Alsdann können wir für (31.) und (32.) schreiben

*) Vgl. *Hellinger*, Quadrat. Formen, Kap. II, § 7.

$$(31'.) \qquad K(x) = \int_m^M \lambda \frac{(d\sum_{(p)} \varrho_p(\lambda) x_p)^2}{d\varrho(\lambda)},$$

$$(32'.) \qquad E(x) = \int_m^M \frac{(d\sum_{(p)} \varrho_p(\lambda) x_p)^2}{d\varrho(\lambda)},$$

indem wir analog (14.) allgemein als Integral eines quadratischen Differentialausdruckes mit einem unstetigen Nenner (34.) definieren*):

$$(36.) \qquad \int_m^M u(\lambda) \frac{df(\lambda)\, dg(\lambda)}{d\varrho(\lambda)} = \int_m^M u(\lambda) \frac{df^*(\lambda)\, dg^*(\lambda)}{d\varrho^*(\lambda)} + \sum_{(a)} u(\lambda_a) \frac{\Delta_{\lambda_a} f\, \Delta_{\lambda_a} g}{\delta_a},$$

wo $f(\lambda) = f^*(\lambda) + \sum_{(\lambda_a < \lambda)} \Delta_{\lambda_a} f$, $g(\lambda) = g^*(\lambda) + \sum_{(\lambda_a < \lambda)} \Delta_{\lambda_a} g$, und f^*, g^* stetig.

Ferner können wir die Identität

$$(37.) \qquad \sum_{(p)} \int_m^M \frac{df(\lambda)\, d\varrho_p(\lambda)}{d\varrho(\lambda)} \int_m^M \frac{dg(\lambda)\, d\varrho_p(\lambda)}{d\varrho(\lambda)} = \int_m^M \frac{df(\lambda)\, dg(\lambda)}{d\varrho(\lambda)}$$

aufstellen; sie ergibt sich auf Grund der Definition (36.) und unter Benutzung von (33^b.), (33^c.) aus der (20.′) analogen aus (33^a.) folgenden Integralidentität

$$\sum_{(p)} \int_{(\mathfrak{S})} \frac{df^*(\lambda)\, d\varrho_p^*(\lambda)}{d\varrho^*(\lambda)} \int_{(\mathfrak{S})} \frac{dg^*(\lambda)\, d\varrho_p^*(\lambda)}{d\varrho^*(\lambda)} = \int_{(\mathfrak{S})} \frac{df^*(\lambda)\, dg^*(\lambda)}{d\varrho^*(\lambda)}.$$

2. Um nunmehr den Übergang zur J-Form auszuführen, bestimmen wir zunächst wieder ein in bezug auf die unstetige Funktion $\varrho(\lambda)$ als Basisfunktion orthogonales System von Polynomen $\pi_p(\lambda)$, wie es durch (17.), § 1 definiert ist; man erkennt unmittelbar, daß diese Polynome genau wie im Falle eines stetigen $\varrho(\lambda)$ durch die Formeln (22.) sukzessive eindeutig bestimmt sind. Hierbei kann wiederum keiner der auftretenden Nenner verschwinden. Denn ist $\varrho^*(\lambda)$ nicht identisch Null, so tritt als Summand in jedem Nenner ein Integral eines positiven Polynoms, multipliziert mit $d\varrho^*(\lambda)$ auf (auf Grund der Zerlegung (14.)) und wir können wie auf S. 230 schließen. Andernfalls aber, wenn $\varrho^*(\lambda) \equiv 0$, bilden wegen (32.) die Orthogonalformen $\sum_{(p)} l_{ap} x_p$ ein vollständiges System, müssen also in unendlicher Anzahl vorhanden sein; daher hat $\varrho(\lambda)$ unendlichviele Sprungstellen λ_a und jedes Integral in den Nennern von (22.) ist gleich einer Summe der Quadrate

*) Auch bei unstetigem $\varrho(\lambda)$ könnte man, wie bei stetigem, dies Integral als Limes der für eine Teilung des Intervalles (m, M) gebildeten Summen $\sum_{(i)} u(\lambda_i) \frac{(\Delta_i f)^2}{\Delta_i \varrho}$ — wo Δ_i die Differenz der betr. Funktionswerte an den Enden des Intervalles, λ_i irgend eine Stelle in ihm bedeutet — bei unbegrenzter Verdichtung der Einteilung definieren, wofern man als Werte von $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, $\varrho(\lambda)$ an den Unstetigkeitspunkten die rechts- oder linksseitigen Grenzwerte dieser Funktionen verwendet.

unendlichvieler Werte eines Polynoms, multipliziert mit positiven Faktoren, kann also gleichfalls nicht verschwinden.

Wörtlich wie in § 2,2. folgern wir nun aus der Orthogonalitätsrelation (21.) der Polynome $\pi_p(\lambda)$ einerseits die „*Bessel*sche Ungleichung“

$$(38.)\qquad \sum_{(p)}\Big(\int_m^M \varphi(\lambda)\pi_p(\lambda)d\varrho(\lambda)\Big)^2 \leqq \int_m^M \varphi(\lambda)^2 d\varrho(\lambda)\,.$$

für jede Funktion $\varphi(\lambda)$, für die die betr. Integrale überhaupt existieren, andererseits die „Vollständigkeitsrelation“

$$(39.)\qquad \sum_{(p)}\Big\{\int_m^M \varphi(\lambda)\pi_p(\lambda)d\varrho(\lambda)\Big\}^2 = \int_m^M \varphi(\lambda)^2 d\varrho(\lambda)$$

für jedes abteilungsweise stetige $\varphi(\lambda)$, dessen Sprungstellen nur nicht mit den Sprungstellen λ_a von $\varrho(\lambda)$ zusammenfallen. Setzen wir nun

$$(40.)\quad \tau_p(\lambda)=\int_m^\lambda \pi_p(\lambda)d\varrho(\lambda)=\tau_p^*(\lambda)+\sum_{(\lambda_a<\lambda)}\pi_p(\lambda_a)\delta_a,\quad \tau_p^*(\lambda)=\int_m^\lambda \pi_p(\lambda)d\varrho^*(\lambda),$$

so entnehmen wir aus (38.) durch Spezialisation von $\varphi(\lambda)$ die Konvergenz der Quadratsummen

$$(41.)\qquad \sum_{(p)}\tau_p(\lambda)^2 \leqq \varrho(\lambda),\qquad \sum_{(p)}\pi_p(\lambda_a)^2 \leqq \frac{1}{\delta_a}$$

für jedes λ bzw. jedes λ_a. Aus (39.) aber ergibt sich wie in § 2,2. (S. 231)

$$(42.)\qquad \sum_{(p)}(\Delta_1\tau_p(\lambda))^2=\Delta_1\varrho \text{ bzw. } \sum_{(p)}\Delta_1\tau_p(\lambda)\Delta_2\tau_p(\lambda)=0,$$

wenn Δ_1, Δ_2 getrennt liegen, zunächst nur für solche Intervalle Δ_1, Δ_2, deren Endpunkte keine Sprungstellen λ_a von $\varrho(\lambda)$ sind; die Gleichungen (42.) können wir in der einen Relation

$$(42.')\qquad \sum_{(p)}\Delta_1\tau_p(\lambda)\Delta_2\tau_p(\lambda)=\Delta_{(1,2)}\varrho(\lambda)$$

zusammenfassen, wo $\Delta_{(1,2)}\varrho$ der Zuwachs von $\varrho(\lambda)$ in dem Δ_1 und Δ_2 gemeinsamen Intervalle bedeuten. Läßt man nun in (42′.) den einen oder andern Endpunkt von Δ_1 oder Δ_2 gegen eine Stelle λ_a konvergieren und berücksichtigt, daß wegen (41.) alle auftretenden Größenreihen konvergente Quadratsummen haben, so ändern sich auf Grund bekannter Sätze über die Stetigkeit (Vollstetigkeit) der beschränkten Linearformen*) die Summenwerte stetig; möge sich insbesondere erst Δ_1 um eine Sprungstelle λ_a und dann nachträglich Δ_2 um eine Sprungstelle λ_β zusammenziehen, so ergibt sich:

$$(43^a.)\qquad \sum_{(p)}\pi_p(\lambda_a)\Delta_2\tau_p(\lambda)=\begin{cases}1, & \text{wenn } \lambda_a \text{ in } \Delta_2,\\ 0, & \text{wenn } \lambda_a \text{ außerhalb } \Delta_2 \text{ liegt;}\end{cases}\qquad (a=1,2,\ldots)$$

$$(43^b.)\qquad \sum_{(p)}\pi_p(\lambda_\alpha)\pi_p(\lambda_\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\delta_\alpha} & (\alpha=\beta),\\ 0 & (\alpha\neq\beta).\end{cases}\qquad (\alpha,\beta=1,2,\ldots)$$

*) Vgl. etwa *Hellinger*, Quadratische Formen, § 1, S. 214.

Nunmehr ergeben sich für den stetigen Bestandteil $\tau_p^*(\lambda)$ aus (42.) und (43.) die Relationen

$$(44^a.)\quad \sum_{(p)} \Delta_1 \tau_p^*(\lambda)\, \Delta_2 \tau_p^*(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \Delta_1, \Delta_2 \text{ getrennt liegen,} \\ \Delta_1 \varrho^*(\lambda), & \text{wenn } \Delta_1, \Delta_2 \text{ identisch sind.} \end{cases}$$

$$(44^b.)\quad \sum_{(p)} \pi_p(\lambda_a)\, \Delta \tau_p^*(\lambda) = 0, \qquad (a=1, 2, \ldots)$$

und zwar zunächst für den Fall, daß die Endpunkte von Δ_1, Δ_2 keine Punkte λ_a sind; da jedoch die $\tau_p^*(\lambda)$ stetig sind, kann man nach der soeben über die Stetigkeit der Summen linkerhand angestellten Überlegung diese Beschränkung sofort fallen lassen. Alsdann besagen aber die Relationen (44ª.), (44ᵇ.) im Verein mit (43ᵇ.), daß für stetige Bestandteile und Sprünge von $\tau_p(\lambda)$ genau dieselben Relationen bestehen, wie laut (33.) für die entsprechenden Bestandteile der Zerlegung (35.) von $\varrho_p(\lambda)$. Wir dürfen daher ohne weiteres das Analogon der Identität (37.)

$$(45.)\qquad \sum_{(p)} \int_m^M \pi_p(\lambda)\, df(\lambda) \int_m^M \pi_p(\lambda)\, dg(\lambda) = \int_m^M \frac{df(\lambda)\, dg(\lambda)}{d\varrho(\lambda)},$$

aufstellen, gültig für alle Funktionen f, g, für die $\int \frac{df^2}{d\varrho}$ und $\int \frac{dg^2}{d\varrho}$ existieren.

3. Nunmehr können wir die Betrachtungen von § 2, 3. unverändert, mit der neuen Bedeutung der Integrale, übernehmen: Die quadratische Form (31.) geht durch die Transformation

$$x_p = \sum_{(q)} o_{pq} \bar{x}_q, \text{ wo } o_{pq} = \int_m^M \pi_q(\lambda)\, d\varrho_p(\lambda) = \int_m^M \pi_q(\lambda)\, d\varrho_p^*(\lambda) + \sum_{(a)} \pi_q(\lambda_a) l_{ap} \sqrt{\delta_a},$$

über in die Form

$$K(x) = \bar{K}(\bar{x}) = \int_m^M \lambda \frac{(d \sum_{(p)} \tau_p(\lambda) x_p)^2}{d\varrho(\lambda)} = \int_m^M \lambda \frac{(d \sum_{(p)} \tau_p^*(\lambda) x_p)^2}{d\varrho(\lambda)} + \sum_{(a)} \lambda_a \delta_a \Big(\sum_{(p)} \pi_p(\lambda_a) x_p\Big)^2,$$

von der alle Koeffizienten außer

$$(46.)\quad \begin{cases} \bar{k}_{pp} = \int_m^M \lambda \pi_p(\lambda)^2 d\varrho(\lambda) = \int_m^M \lambda \pi_p(\lambda)^2 d\varrho^*(\lambda) + \sum_{(a)} \lambda_a \pi_p(\lambda_a)^2 \delta_a = a_p, \\ \bar{k}_{p,p+1} = \int_m^M \lambda \pi_p(\lambda) \pi_{p+1}(\lambda)\, d\varrho(\lambda) = \int_m^M \lambda \pi_p(\lambda) \pi_{p+1}(\lambda) d\varrho^*(\lambda) + \sum_{(a)} \lambda_a \pi_p(\lambda_a) \pi_{p+1}(\lambda_a) \delta_a = -b_p \end{cases}$$

gewiß gleich Null sind. Überdies ergeben sich noch die Rekursionsformeln (30.) für die Polynome $\pi_p(\lambda)$, und es folgt, daß $b_p \neq 0$ und $\bar{K}(\bar{x})$ tatsächlich eine J-Form ist; die $\pi_p(\lambda)$ sind die ihr wie in § 1 zugeordneten Polynome.

Satz V: *Jede beschränkte quadratische Form mit einfachem Streckenspektrum und einfachen — möglicherweise im Streckenspektrum gelegenen — Eigenwerten läßt sich orthogonal in eine J-Form transformieren.*

Die Formeln (46.) stimmen mit der in § 1 hergeleiteten Normaldarstellung (15.) einer J-Form genau überein. Nun zeigen aber die Überlegungen von Nr. 2, 3 unmittelbar, daß zu jeder beliebig gegebenen monotonen Funktion $\varrho(\lambda)$, die für $\lambda \leqq m$ Null und für $\lambda \geqq M$ konstant ist, ein zu ihr als Basis gehöriges System orthogonaler Polynome eindeutig bestimmt ist, und daß es daher eine und nur eine beschränkte J-Form gibt, die überhaupt eine solche Normaldarstellung (15.) mit eben diesem $\varrho(\lambda)$ gestattet. Insbesondere muß also in unserm Falle $\varrho(\lambda)$ — abgesehen von der unwesentlichen Wertbestimmung an den Unstetigkeitsstellen — die „charakteristische Funktion" (vgl. Satz III) der J-Form $\overline{K}(\bar{x})$ sein, und allgemein gilt für jede J-Form:

Satz VI: *Es gibt stets eine und nur eine beschränkte J-Form, die eine beliebig gegebene außerhalb eines endlichen Intervalles konstante und in diesem vom Werte* 0 *an wachsende monotone Funktion zur charakteristischen Funktion hat und die mit Hilfe des Systemes in bezug auf dieses* $\varrho(\lambda)$ *orthogonaler Polynome* $\pi_p(\lambda)$ *die Normaldarstellung:*

$$J(x) = \sum_{(p)} \left\{ x_p^2 \int \lambda \pi_p(\lambda)^2 d\varrho(\lambda) + 2 x_p x_{p+1} \int \lambda \pi_p(\lambda) \pi_{p+1}(\lambda) d\varrho(\lambda) \right\}$$

gestattet; Funktionen, die sich, abgesehen von den Werten an den Sprungstellen, nur um einen konstanten Faktor unterscheiden — aber auch nur solche — liefern dieselbe J-Form.

Der Prozeß der orthogonalen Transformation der Form $K(x)$ in eine J-Form verläuft also eindeutig, wenn man die Funktion $\varrho(\lambda)$, d. h. die Darstellung von $K(x)$ in der Gestalt (31′.), kennt. Diese Darstellung ist aber auf unendlich mannigfache Art möglich: Einmal sind ja die Zahlen δ_a nur durch die Bedingung der Konvergenz von $\sum_{(a)} \delta_a$ gebunden und können sonst völlig willkürlich gewählt werden; andererseits aber ist auch die Basisfunktion $\varrho^*(\lambda)$ eines einfachen Streckenspektrums nicht eindeutig bestimmt, sondern sie kann willkürlich einer ganzen Klasse monotoner Funktionen von bestimmtem Wachstumscharakter entnommen werden*). Es folgt daher schließlich:

Satz VII: *Jede beschränkte Form mit einfachem Spektrum kann in unendlich viele verschiedene J-Formen orthogonal transformiert werden.*

---

*) *Hellinger*, Orthogonalinvarianten, § 10, 11. Siehe insbes. Satz VI (S. 69).

Über monotongekrümmte Kurven.

Von Herrn *Wolfgang Vogt* in Heidelberg.

Eine reelle, ebene, stetig gekrümmte Kurve (oder ein Kurvenstück) ohne Spitze, ohne Wendepunkt und *ohne Scheitel*, d. h. ohne Stelle, an welcher der Krümmungsradius ein relatives Extremum ist, soll *monotongekrümmt* heißen. Jede stetig gekrümmte Kurve setzt sich aus monotongekrümmten Kurvenstücken zusammen, die in Wendepunkten, Spitzen oder Scheitelpunkten aneinanderstoßen. Im folgenden werden über *monotongekrümmte Kurven und Kurvenstücke*, für welche man als Beispiel die logarithmische Spirale im Auge haben kann, eine Reihe allgemeiner Sätze aufgestellt; als Anwendung folgt aus ihnen unmittelbar ein unlängst von Herrn *Kneser* veröffentlichter Satz des Herrn *Caratheodory* über die Anzahl der Scheitel einer geschlossenen konvexen Kurve*).

I. Monotongekrümmte Kurven.

Durchläuft ein Punkt eine monotongekrümmte Kurve in einer Richtung, so nimmt die Krümmung nie ab, durchläuft er sie in der andern Richtung, so wächst die Krümmung nie; wir drücken uns negativ aus, um den Fall miteinzuschließen, daß die Krümmung streckenweis konstant ist, die Kurve also ein Kreisstück enthält. Jeder Punkt zerlegt die monotongekrümmte Kurve in zwei Äste, die wir nun nach der eben gemachten Bemerkung kurz den *Ast wachsender Krümmung* und den *Ast*

*) *A. Kneser*, Bemerkungen über die Anzahl der Extrema der Krümmung auf geschlossenen Kurven usw. in der Festschrift zum 70. Geburtstag von *Heinrich Weber*, Leipzig 1912, S. 170. Siehe auch *W. Blaschke*, Die Minimalzahl der Scheitel einer geschlossenen konvexen Kurve. Rend. d. Circolo Mat. d. Palermo, tomo XXXVI, fasc. II, p. 220, 1913, sowie *H. Mohrmann* ebenda, tomo XXXVII, fasc. II, p. 267, 1914. Vgl. hierzu die *monotropen* Kurven des Herrn *Mohrmann*, Math. Annalen. Bd. 72, S. 285, 1912.

abnehmender Krümmung nennen können. Dies gilt nicht, wenn die Kurve aus einem Kreise allein besteht, welchen Sonderfall wir nicht immer hervorheben wollen.

Berücksichtigen wir die Evolute der monotongekrümmten Kurve, so wird der Ast wachsender Krümmung von einem Punkte einer Evolutentangente erzeugt, wenn die Tangente auf der Evolute aufgewickelt wird, während der Ast abnehmender Krümmung bei Abwicklung der Tangente entsteht. Die Evolute einer monotongekrümmten Kurve kann keine Spitze und keinen Wendepunkt enthalten, weil die Kurve selbst keinen Scheitel und keine Spitze besitzt; sie geht ins Unendliche, wenn der Ast abnehmender Krümmung in eine Gerade ausläuft, und sie bekommt eine Ecke, wenn die monotongekrümmte Kurve ein Kreisstück enthält. Wir können auch für einzelne Stellen von der Forderung der Stetigkeit in der Krümmung absehen und einen Sprung im Krümmungsradius zulassen, wofern er nur in der Tendenz des zugehörigen Kurvenastes erfolgt. In diesem Falle enthält die Evolute ein Geradenstück.

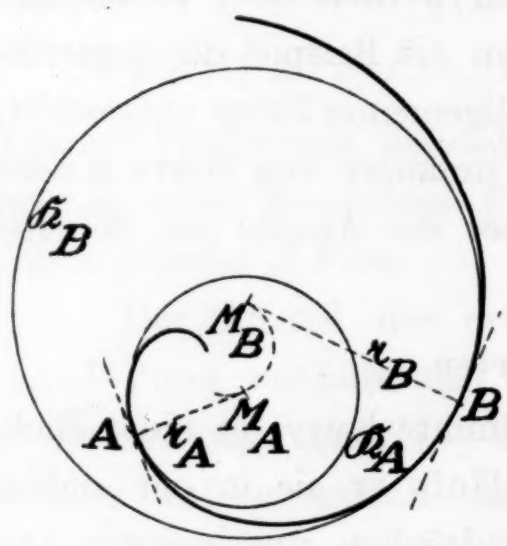

Fig. 1.

Satz 1. *Bei einer monotongekrümmten Kurve liegt jeder kleinere Krümmungskreis ganz im Innern jedes größeren*); an einer Sprungstelle des Krümmungsradius berührt der kleinere Kreis den größeren von innen.*

Folgt nämlich der Kurvenpunkt B dem Kurvenpunkt A in der Richtung abnehmender Krümmung und sind M_A, M_B, r_A, r_B die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte und Krümmungsradien, so ist (Fig. 1)

$$r_B = \overset{\frown}{M_B M_A} + r_A \quad r_B \geqq \overline{M_B M_A} + r_A, \quad r_B - r_A \geqq \overline{M_B M_A},$$

wenn mit $\overset{\frown}{M_B M_A}$ die Länge des Evolutenbogens zwischen M_B und M_A, mit $\overline{M_B M_A}$ die gerade Entfernung dieser beiden Punkte bezeichnet wird. Im allgemeinen gilt das Zeichen $>$. Dann ist die Differenz der Kreisradien größer als die Zentrale, der Krümmungskreis $\mathfrak{K}_A$ liegt also ganz innerhalb des Krümmungskreises $\mathfrak{K}_B$. Das Gleichheitszeichen gilt, wenn entweder $\overset{\frown}{M_B M_A} = \overline{M_B M_A} = 0$, $M_B \equiv M_A$, $r_B = r_A$ ist, also die Kurve zwischen A und B

*) s. *Kneser*, a. a. O., S. 171.

in einem Kreisstück besteht — dieser Fall kommt im Satze nicht vor — oder wenn $\overset{\frown}{M_A M_B} = \overline{M_A M_B}$ ist, die Evolute die gerade Strecke $M_A M_B$ enthält und der Krümmungsradius um diese Strecke gesprungen ist. Dann sagt die Gleichung aus, daß der kleinere Kreis $\mathfrak{K}_A$ berührend im Innern des größeren liegt.

Danach können keine zwei verschiedenen Krümmungskreise einen Punkt gemeinsam haben, es sei denn, daß sie sich in einer Sprungstelle des Krümmungsradius berühren. Die monotongekrümmte Kurve selbst kann also auch keinem ihrer Krümmungskreise außer im Oskulationspunkte — der sich im Falle eines Kreisstückes auch auf ein endliches Stück erstrecken kann — nochmals begegnen; daß heißt:

Satz 2. *Von einem Punkte A einer monotongekrümmten Kurve aus verläuft der Ast wachsender Krümmung ganz innerhalb, der Ast abnehmender Krümmung ganz außerhalb des Krümmungskreises $\mathfrak{K}_A$ im Punkte A, doch können beide Äste in der Umgebung von A Stücke des Kreises selbst enthalten;* ist A eine Sprungstelle, so verläuft der Ast wachsender Krümmung innerhalb des kleineren, der Ast abnehmender Krümmung außerhalb des größeren Krümmungskreises.

Satz 3. *Eine monotongekrümmte Kurve kann keinen Doppelpunkt besitzen, es sei denn, daß sie einen ganzen Kreis enthält.*

Ein beliebiger Punkt A einer monotongekrümmten Kurve liegt innerhalb aller von seinem eigenen Krümmungskreis verschiedenen Krümmungskreise des Astes abnehmender Krümmung, von ihm aus kann also an diese Krümmungskreise und folglich auch an den ganzen Ast abnehmender Krümmung keine Tangente mehr gehen, andrerseits kann die Tangente im Punkte A von dem Ast wachsender Krümmung nicht mehr getroffen werden. Es folgt also zweierlei:

Satz 4. *Von einem Punkte A einer monotongekrümmten Kurve geht an den Ast abnehmender Krümmung keine Tangente; der Ast wachsender Krümmung liegt ganz auf der einen Seite der Tangente im Punkte A.*

Lassen wir einen Punkt B von A aus den Ast abnehmender Krümmung durchlaufen und verfolgen den Drehungssinn des Radiusvektors AB um A herum, so kann er sich nur ändern, wenn der Radiusvektor die Kurve einmal in B berührt, oder wenn die Kurve in B eine Spitze besitzt; beides ist ausgeschlossen.

Satz 5. *Durchläuft ein Punkt B von A ausgehend den Ast abnehmender Krümmung, so dreht sich der Radiusvektor AB um A beständig in demselben Sinn; A bleibt auf derselben Seite des in der Richtung abnehmender Krümmung durchlaufenen Astes.*

Von den Schnittpunkten mit einer beliebigen Geraden durch A läßt sich danach zunächst aussagen, daß sie abwechselnd auf der einen und andern Halbgeraden von A gelegen sind. Sind B, C, D die aufeinanderfolgenden Schnittpunkte mit dem Aste abnehmender Krümmung, so liegt C auf der Verlängerung von BA; der Krümmungskreis von C umfaßt A und B, also die Strecke CB, und D liegt auf der Verlängerung von AB usf.

Satz 6. *Von den Schnittpunkten einer Geraden mit einer in der Richtung abnehmender Krümmung durchlaufenen monotongekrümmten Kurve schließen auf der Geraden je zwei aufeinanderfolgende alle vorhergehenden ein, alle folgenden aus.*

Hieraus, doch auch schon aus Satz 4 allein, folgt:

Satz 7. *Eine monotongekrümmte Kurve kann keine Doppeltangente besitzen.*

A, B, C, D seien vier in der Richtung abnehmender Krümmung aufeinanderfolgende Schnittpunkte einer monotongekrümmten Kurve mit einem Kreise $\mathfrak{K}$. Der Krümmungskreis $\mathfrak{K}_B$ schließt A ein. Die Punkte A, B bestimmen also zwei Kreisteile, von denen einer ganz innerhalb $\mathfrak{K}_B$ liegt. Da von B aus der Ast abnehmender Krümmung nicht mehr ins Innere von $\mathfrak{K}_B$ dringt, so liegen alle weiteren Schnittpunkte mit dem Kreis $\mathfrak{K}$ in demjenigen Kreisteil $\overset{\frown}{AB}$, welcher nicht ganz innerhalb $\mathfrak{K}_B$ liegt. Der Krümmungskreis $\mathfrak{K}_C$ schließt die Punkte B und A sowie ihre Krümmungskreise ein, der Kreisteil BAC liegt also ganz in ihm, und da der Ast abnehmender Krümmung nicht mehr in ihn eindringt, so müssen die weiteren Schnittpunkte, also auch D, in demjenigen Kreisteil $\overset{\frown}{BC}$ von $\mathfrak{K}$ liegen, welcher A nicht enthält. Von den vier aufeinanderfolgenden Schnittpunkten A, B, C, D trennen also die beiden mittelsten B, C den ersten A vom vierten D. Daraus folgt:

Satz 8. *Je zwei aufeinanderfolgende Schnittpunkte einer in der Richtung abnehmender Krümmung durchlaufenen monotongekrümmten Kurve mit einem Kreise trennen auf dem Kreise alle vorhergehenden Schnittpunkte von allen folgenden.*

Berührt ein Kreis $\mathfrak{K}$ eine Kurve in einem nicht singulären Punkte P, so kann der Krümmungskreis $\mathfrak{K}_P$ den berührenden Kreis $\mathfrak{K}$ entweder berührend einschließen oder ausschließen. Nehmen wir an, eine monotongekrümmte Kurve werde im Punkte P von einem Kreis $\mathfrak{K}$ so berührt, daß der Krümmungskreis $\mathfrak{K}_P$ den Kreis $\mathfrak{K}$ einschließt (Fig. 2). Dann kann nur der Ast wachsender Krümmung von P aus weitere Treffpunkte mit $\mathfrak{K}$ haben, weil der Ast abnehmender Krümmung ganz außerhalb $\mathfrak{K}_P$ verläuft. Q sei ein weiterer Berührungspunkt des Astes wachsender Krümmung mit dem Kreise $\mathfrak{K}$. Der Krümmungskreis $\mathfrak{K}_Q$ liegt innerhalb $\mathfrak{K}_P$ und schließt darum P und mit ihm den Kreis $\mathfrak{K}$ berührend aus. Die zweite Berührung ist also von der andern Art. Der Ast wachsender Krümmung verläuft dann ganz innerhalb $\mathfrak{K}_Q$ und kann dem Kreise $\mathfrak{K}$ nicht mehr begegnen. Mehr als diese zwei Berührungspunkte mit dem Kreise $\mathfrak{K}$ können also nicht auftreten. Dasselbe ergibt sich, wenn wir von einem Berührungspunkte Q ausgehen, in welchem der Krümmungskreis $\mathfrak{K}_Q$ den Kreis $\mathfrak{K}$ ausschließt. Dann sind weitere Treffpunkte mit $\mathfrak{K}$, also auch ein weiterer Berührungspunkt, nur auf dem Aste abnehmender Krümmung möglich, und in einem solchen weiteren Berührungspunkt P muß der Krümmungskreis $\mathfrak{K}_P$ den Krümmungskreis $\mathfrak{K}_Q$, also auch Q selbst und den Kreis $\mathfrak{K}$ berührend einschließen; in P fände also wieder die andere Art der Berührung statt, und mehr als zwei Berührungspunkte sind unmöglich.

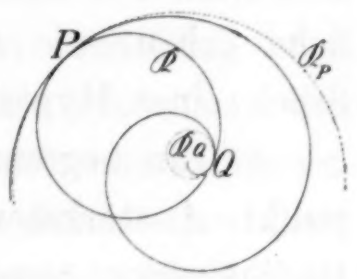

Fig. 2.

Satz 9. *Eine monotongekrümmte Kurve kann einen Kreis höchstens zweimal berühren, und zwar muß der Krümmungskreis das eine Mal den berührenden Kreis einschließen, das andere Mal ausschließen.*

Von der Erreichbarkeit der in diesem und den anderen Sätzen vorkommenden Höchstzahlen überzeugt man sich durch Beispiele von logarithmischen Spiralen oder aus Kreisbögen geeignet zusammengesetzten Kurven.

II. Monotongekrümmte begrenzte Kurvenstücke.

Im folgenden behandeln wir Bögen monotongekrümmter Kurven, welche ganz auf einer Seite einer Sehne gelegen sind. Um die Grenze möglichst weit zu ziehen, betrachten wir solche Kurvenstücke, welche die

Tangente im Endpunkte stärkster Krümmung nicht nochmals schneiden und nennen sie kurz „*begrenzte*“ Kurvenstücke. Ein „begrenztes“ Kurvenstück kann übrigens in der Richtung abnehmender Krümmung ins Unendliche gehen, wie z. B. das vom Scheitelpunkt ins Unendliche laufende Stück einer Hyperbel oder Parabel.

Ein begrenztes Kurvenstück schneidet jede Gerade durch den Endpunkt A stärkster Krümmung höchstens noch in einem Punkte. Der Radiusvektor von A nach einem das Kurvenstück von A aus durchlaufenden Punkte C dreht sich nämlich um A in konstantem Drehsinn und müßte daher, ehe er zum zweiten Male in eine Gerade durch A fällt, noch einmal in die Tangente in A gefallen sein, was durch die Definition ausgeschlossen ist. Ist D ein beliebiger Punkt des Kurvenstückes, so kann das von D auslaufende Stück abnehmender Krümmung eine Gerade durch D höchstens noch in einem Punkte schneiden, weil der Radiusvektor sich wieder um D in konstantem Sinne dreht, und ehe er zum zweiten Male in die gegebene Gerade fällt, einmal in der Geraden DA gelegen haben müßte, was einen neuen Schnittpunkt mit DA erfordern würde. Da wir nun D beliebig nahe an A wählen können, so folgt daraus:

Satz 10. *Ein „begrenztes“ monotongekrümmtes Kurvenstück kann mit einer Geraden höchstens zwei Schnittpunkte oder einen Berührungspunkt gemein haben.*

Sind andrerseits A und B zwei aufeinanderfolgende Schnittpunkte einer monotongekrümmten Kurve mit einer Geraden, so ist der Bogen $\overset{\frown}{AB}$ ein begrenztes Kurvenstück. Wenn nämlich die Krümmung von A nach B abnimmt, so dreht sich der Radiusvektor von A nach einem den Bogen AB durchlaufenden Punkte wieder in konstantem Drehsinn. Er liegt zu Anfang in der Tangente im Punkte A und kann erst wieder in sie fallen, nachdem er auf allen Geraden durch A gelegen hat, also *nach* der Lage AB; der Bogen $\overset{\frown}{AB}$ kann also die Tangente im Endpunkt stärkster Krümmung nicht schneiden.

Satz 11. *Ein monotongekrümmtes begrenztes Kurvenstück kann einen Kreis in höchstens drei Punkten schneiden oder in einem Punkte berühren und in einem anderen schneiden.*

Nehmen wir nämlich an, A, B, C, D seien vier Schnittpunkte mit dem Kreis in der Reihenfolge abnehmender Krümmung, dann liegen nach

Satz 8 A und D in verschiedenen der beiden durch BC getrennten Kreisteile, also auch auf verschiedenen Seiten der Geraden BC. Die Kurve tritt aber von A kommend im Punkte B auf die Seite des Punktes D, im Punkte C wieder auf die Seite des Punktes A; um schließlich noch nach D zu kommen, müßte sie die Gerade BC nochmals schneiden, was nach dem vorigen Satze bei einem begrenzten Kurvenstück unmöglich ist. Lassen wir A nach B oder D nach C rücken, so folgt durch Grenzübergang, daß außer einer Berührung nur noch ein Treffpunkt möglich ist. Der zweite Treffpunkt kann aber nicht wieder ein Berührungspunkt sein. Denn nach Satz 9 muß in einem von zwei Berührungspunkten der Krümmungskreis den berührenden Kreis einschließen, im andern ausschließen. Das Kurvenstück zwischen den beiden Berührungspunkten müßte dann die Tangente in demjenigen von ihnen, dessen Krümmungskreis den gegebenen Kreis ausschließend berührt, mindestens noch einmal überschreiten, was wieder nach dem Obigen bei einem begrenzten Kurvenstücke unmöglich ist.

Satz 11[a]. *Ein monotongekrümmtes begrenztes Kurvenstück kann einen Kreis nicht zweimal berühren.*

Seien nun (Fig. 3) A und B wieder zwei in der Richtung abnehmender Krümmung aufeinanderfolgende Schnittpunkte einer monotongekrümmten Kurve mit einer Geraden g. Der Kurvenbogen $\overset{\frown}{AB}$ liegt ganz auf einer Seite von g. Der Krümmungskreis $\mathfrak{K}_B$ in B schließt den Punkt A ein und berührt darum auch denjenigen Kreis $\mathfrak{K}$ einschließend, der die Kurventangente b in B berührt und durch A hindurchgeht. Das Kurvenstück $\overset{\frown}{AB}$ läuft also in der Nähe von B außerhalb dieses Kreises; da es begrenzt ist, kann es ihn vor A nicht mehr schneiden und kommt daher auch in A von außen an den Kreis $\mathfrak{K}$ heran. Das heißt aber — wenn wir unter α und β die Winkel ($< \pi$) der Sehne AB gegen diejenigen Halbgeraden der Kurventangenten a und b in A und B

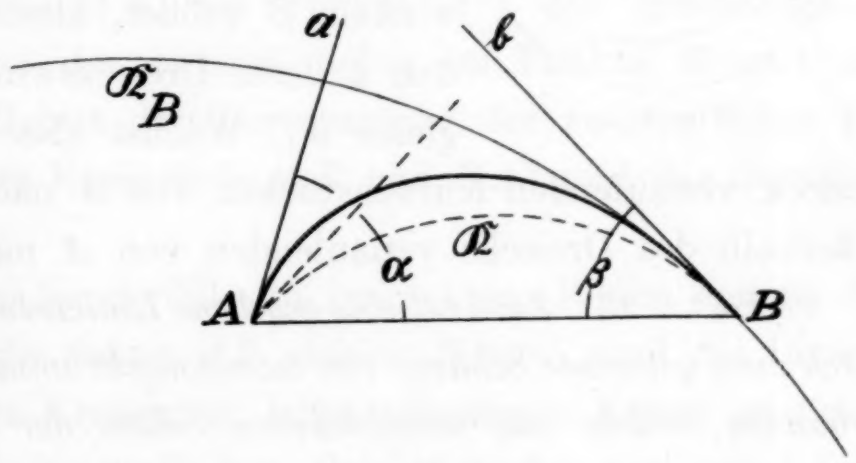

Fig. 3.

verstehen, welche auf derselben Seite von g liegen wie der Bogen $\overset{\frown}{AB}$ — Winkel α ist größer als der Winkel der Kreistangente in A gegen die Sehne AB, also, da dieser gleich β ist, α ist größer als β.

Satz 12. *Sind A und B aufeinanderfolgende Schnittpunkte einer monotongekrümmten Kurve mit einer Geraden g, α und β die Winkel der Sehne AB mit denjenigen Halbgeraden der Tangenten in A und B, welche auf derselben Seite von g liegen wie der Bogen $\overset{\frown}{AB}$, so ist α größer, kleiner oder gleich β, je nachdem die Krümmung von A nach B fällt, wächst oder gleichbleibt.*

Nehmen wir nun zwei beliebige Linienelemente $A, a; B, b$ an und fragen nach den monotongekrümmten begrenzten Kurvenstücken, welche sie verbinden (Fig. 4), so werden sie sämtlich innerhalb des von den beiden Tangenten a, b gebildeten Winkelraumes ASB liegen müssen, weil sie ja keine ihrer Tangenten nochmals schneiden dürfen. Es wird ferner eine Schar von ihnen im Dreieck ASB liegen, eine andere in dem Winkelraum außerhalb, weil kein Kurvenstück die Gerade AB nochmals überschreiten kann. Ist nun bei den inneren Dreieckswinkeln β größer, kleiner oder gleich α, so ist bei den äußeren Dreieckswinkeln β' kleiner, größer oder gleich α'. Wächst also die Krümmung bei den im Dreieck verlaufenden Kurvenstücken von A nach B, so nimmt sie bei den außerhalb des Dreiecks verlaufenden von A nach B ab und umgekehrt.

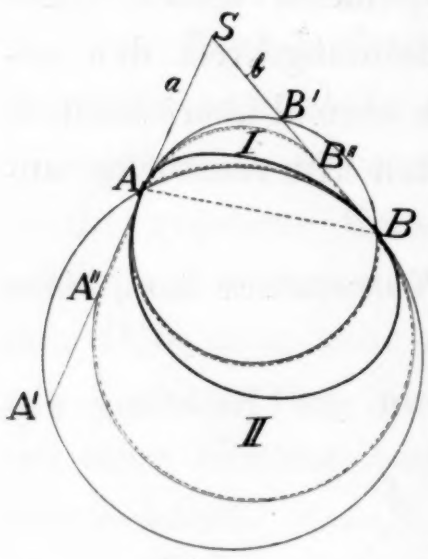

Fig. 4.

Satz 13. *Zwei beliebig gegebene Linienelemente werden im allgemeinen durch zwei getrennte Scharen von monotongekrümmten begrenzten Kurvenstücken verbunden, welche auf verschiedenen Seiten der Sehne verlaufen; wächst die Krümmung der einen Schar von A nach B, so nimmt die der andern Schar von A nach B ab und umgekehrt.*

Für die Scharen von Kurvenstücken können wir leicht begrenzte Gebiete angeben, in welchen sie verlaufen müssen. Wir nehmen dazu wieder an $\alpha > \beta$. Die Krümmung der Stücke im Dreieck ASB nimmt dann von A nach B ab, diejenige der Stücke außerhalb wächst von A nach B. Der Kreis, welcher b in B berührt und durch A geht, schneidet a dann, wie man auf elementarem Wege sieht, zum zweiten Male auf der Verlängerung

von SA in A'. Wir wissen schon aus dem vorigen, daß die Kurvenstücke im Dreieck ganz außerhalb dieses Kreises verlaufen, und überzeugen uns ebenso, daß diejenigen außerhalb des Dreieckes ganz innerhalb des Kreises liegen. Derjenige Kreis, welcher a in A berührt und durch B geht, schneidet aber die Gerade b zum zweiten Male innerhalb der Strecke SB in B'. Die Kurvenstücke der ersten Schar liegen also in der Umgebung von B und folglich im ganzen Verlauf innerhalb dieses zweiten Kreises, diejenigen der zweiten Schar aus denselben Gründen außerhalb. Indessen können die äußeren Grenzen der beiden Gebiete von den Kurven nicht erreicht werden, und wir können sie durch erreichbare andere ersetzen. Der Kreis, welcher a in A berührt und auch b berührt in einem neuen Punkte B'', der sicher in der Strecke BB' liegt, ist für die erste Schar der größtmögliche Krümmungskreis in A; denn jeder größere würde BS schneiden und dem Kurvenstück den Weg von A nach B versperren. Ist der Krümmungskreis eines Kurvenstückes in A kleiner als dieser Kreis, so verläuft es zunächst innerhalb des Kreises und könnte ihn doch nur noch einmal schneiden. Darum bleibt es innerhalb, und das Gebiet der Kurven der ersten Schar ist durch die schraffierten Kreisbögen BA und AB'' und durch das Geradenstück $B''B$ begrenzt. Ebenso ist derjenige Kreis, welcher b in B berührt und außerdem a in der Strecke AA' im Punkte A'', der größtmögliche Krümmungskreis der Kurven der zweiten Schar im Punkte B, und aus demselben Grunde ist das Gebiet der Kurvenstücke der zweiten Schar begrenzt durch die schraffierten Kreisstücke AB und BA'' und das Geradenstück $A''A$.

Wir haben noch zwei Sonderfälle zu betrachten: Bilden erstens die Tangenten a und b gegen die Sehne AB gleiche Winkel, sind die Linienelemente also Elemente eines Kreises, so fallen alle unsere Kreise in diesen einen zusammen, es gibt keine endlichen Gebiete mehr, und wir haben, was ja auch schon aus Satz 11a folgt:

Satz 14. *Die einzigen monoton gekrümmten begrenzten Kurvenstücke, welche zwei Linienelemente eines Kreises verbinden, sind die beiden Kreisstücke, in welche jener Kreis durch die beiden Linienelemente zerlegt wird.*

Der zweite Sonderfall besteht darin, daß der Punkt des einen Linienelementes auf der Tangente des anderen gelegen ist. Hier bestimmen die beiden Elemente nicht einen sondern zwei Winkelräume; es gibt also

wieder zwei Scharen von monotongekrümmten begrenzten Kurvenstücken zwischen ihnen, sie verlaufen auf verschiedenen Seiten der Tangente b, bei beiden wächst die Krümmung von A nach B, wie aus Satz 4 ohne weiteres folgt, und die Grenzen der von ihnen erfüllten Gebiete sind wie oben anzugeben.

Wenden wir uns schließlich dem eingangs erwähnten Satze der Herren *Caratheodory* und *Kneser* zu, so würde die Existenz einer stetig gekrümmten geschlossenen konvexen Kurve mit nur zwei Krümmungsextremen erfordern, daß zwei — nicht in der Lage der obigen Sonderfälle befindliche — Linienelemente A, a; B, b durch zwei monotongekrümmte Kurvenstücke verbunden werden können, welche auf verschiedenen Seiten der Sehne AB liegen und in A und B dieselben Krümmungskreise besitzen. Das ist aber nach unserm Satze 13 unmöglich, weil das eine Kurvenstück von A nach B in der Krümmung wächst, das andere abnimmt.

Eine stetig gekrümmte, geschlossene, konvexe Kurve muß also mehr als zwei Krümmungsextreme besitzen.

Neue Anwendungen der Theorie der *Diophant*ischen Approximationen auf die *Riemann*sche Zetafunktion.

Von Herrn *Harald Bohr* in Kopenhagen und Herrn *Richard Courant* in Göttingen.

Einleitung.

Das Ziel der vorliegenden Abhandlung ist die Untersuchung des Wertevorrates der *Riemann*schen Zetafunktion $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$ auf vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0$ im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$.

In einigen früheren Arbeiten*) hat *Bohr* das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ mit Hilfe eines *Kronecker*schen Satzes über *Diophant*ische Approximationen studiert und insbesondere die Gesamtheit der Werte untersucht, die $\zeta(s)$ bei festem $\sigma_0 > 1$ auf der vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt.

Um das Neue in dem Gedankengang und dem Resultate der vorliegenden Abhandlung, in der wir eine analoge Frage für einen Teil des „kritischen Streifens“ $0 \leq \sigma \leq 1$ behandeln, deutlicher hervortreten zu lassen, schicken wir ein kurzes Referat über die Methode und eines der Hauptergebnisse der erwähnten früheren Untersuchungen für die Halbebene $\sigma > 1$ voraus; wir bemerken jedoch, daß das Verständnis der vorliegenden Abhandlung die Kenntnis dieser älteren Arbeiten nicht erfordert.

Es sei σ_0 eine feste Zahl größer als 1 und $U(\sigma_0)$ die Menge der Werte, welche die *Riemann*sche Zetafunktion

$$(1.) \qquad \zeta(\sigma_0 + it) = F(t) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-(\sigma_0 + it)})^{-1}$$

*) Vgl. insbesondere: Sur la fonction $\zeta(s)$ dans le demi-plan $\sigma > 1$. C. R. de l'Ac. des sciences, Paris, t. 154, 1912.

annimmt, wenn die reelle Variable t von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft; dabei bedeutet p_n, wie üblich, die n-te Primzahl. Gleichzeitig mit $F(t)$ betrachten wir die Funktion der *unendlich vielen reellen* Variabeln $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n, \ldots$

$$(2.) \qquad F(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n, \ldots) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-\sigma_0} e^{2\pi i \eta_n})^{-1}.$$

Wegen der Konvergenz der Reihe mit positiven Gliedern $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-\sigma_0}$ konvergiert das Produkt (2.) für jedes reelle Wertsystem $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n, \ldots$. Es bezeichne $V(\sigma_0)$ die Menge aller Werte, die das Produkt $F(\eta_1, \eta_2, \ldots)$ annimmt, wenn die Variabeln $\eta_1, \eta_2, \ldots$ *unabhängig voneinander* alle reellen Werte, oder — was auf dasselbe hinauskommt — alle Werte $0 \leqq \eta_n < 1$ durchlaufen. Dann gilt der Satz: *Die Menge $U(\sigma_0)$ — die offenbar eine Teilmenge von $V(\sigma_0)$ ist — liegt in $V(\sigma_0)$ überall dicht.*

Der in den oben erwähnten Untersuchungen von *Bohr* geführte Beweis dieses Satzes*) läßt sich etwa folgendermaßen skizzieren. Es sei $a = F(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \ldots)$ eine beliebig gegebene, dem Wertsystem $\eta_n = \bar{\eta}_n$ entsprechende Zahl der Menge $V(\sigma_0)$; dann ist die Existenz eines solchen reellen t_0 zu beweisen, daß $\zeta(\sigma_0 + it_0)$ sich von a um weniger als eine beliebig vorgeschriebene Größe unterscheidet. Hierzu genügt es nachzuweisen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches ganzzahliges N und reelles t_0 gibt, daß, wenn

$$F_N(\sigma_0 + it) = \prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-(\sigma_0 + it)})^{-1}, \quad R_N(\sigma_0 + it) = \prod_{n=N+1}^{\infty} (1 - p_n^{-(\sigma_0 + it)})^{-1}$$

und entsprechend

$$F_N(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N) = \prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-\sigma_0} e^{2\pi i \eta_n})^{-1}, \; R_N(\eta_{N+1}, \eta_{N+2}, \ldots) = \prod_{n=N+1}^{\infty} (1 - p_n^{-\sigma_0} e^{2\pi i \eta_n})^{-1}$$

gesetzt wird, gleichzeitig

$$|F_N(\sigma_0 + it_0) - F_N(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \ldots \bar{\eta}_N)| < \varepsilon,$$

$$|R_N(\sigma_0 + it_0) - 1| < \varepsilon, \quad |R_N(\bar{\eta}_{N+1}, \bar{\eta}_{N+2}, \ldots) - 1| < \varepsilon$$

ist. Die Befriedigung der beiden letzten Ungleichungen bietet gar keine Schwierigkeit; denn wegen der für alle reellen Wertsysteme $\eta_1, \eta_2, \ldots$ gleichmäßigen Konvergenz von (2.) und der hieraus erst recht folgenden für alle reellen t gleichmäßigen Konvergenz von (1.) läßt sich ein solches N finden, daß

*) Dieser Satz ist übrigens ein Spezialfall eines allgemeinen Satzes über *Dirichlet*sche Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$. Vgl. *H. Bohr*: Über die Bedeutung der Potenzreihen von unendlich vielen Variabeln in der Theorie der *Dirichlet*schen Reihen, Nachr. d. Ges. d. Wiss., Göttingen, math.-phys. Kl., 1913.

$$|R_N(\bar{\eta}_{N+1}, \bar{\eta}_{N+2}, \ldots) - 1| < \varepsilon$$

sowie für *alle* t

$$|R_N(\sigma_0 + it) - 1| < \varepsilon$$

ist. Es genügt also, bei festem N die Existenz eines solchen t_0 zu beweisen, daß

$$|F_N(\sigma_0 + it_0) - F_N(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \ldots \bar{\eta}_N)| < \varepsilon \tag{3.}$$

wird. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß in dem Produkte $F_N(\sigma_0 + it)$ die Amplituden μ_n von $p_n^{-(\sigma_0+it)}$ (bis auf beliebige Vielfache von 2π) gleich $-t \log p_n$ sind, also, wenn zur Abkürzung $\lambda_n = -\frac{\log p_n}{2\pi}$ gesetzt wird, $\mu_n = 2\pi \cdot t\lambda_n$ ist. Nun sind aber — und dies ist der Kernpunkt des hier referierten Beweises — die Zahlen $\log p_1, \log p_2, \ldots \log p_N$, also auch die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_N$ wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung einer ganzen Zahl in Primfaktoren, *voneinander linear unabhängig.* Daher können wir aus einem wohlbekannten *Kronecker*schen Satze über *Diophant*ische Approximationen folgendes entnehmen: Ist P_t derjenige Punkt im N-dimensionalen Einheitswürfel, der aus dem Punkte $(t\lambda_1, t\lambda_2, \ldots t\lambda_N)$ durch Reduktion jeder Koordinate modulo 1 entsteht, so liegt die Menge der Punkte P_t *im Einheitswürfel überall dicht,* wenn t irgend ein nach wenigstens einer Seite ins Unendliche reichendes Intervall durchläuft. Es kommt daher gewiß für geeignete $t = t_0$ der Punkt P_t dem festen Punkte $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \ldots \bar{\eta}_N)$ beliebig nahe. Der Beweis der Existenz eines t_0, das (3.) befriedigt, und damit der Beweis des oben formulierten Satzes ergibt sich nun von selbst.

Durch diesen Satz ist die Bestimmung der Wertmenge $U(\sigma_0)$ im wesentlichen auf die Bestimmung der Menge $V(\sigma_0)$ zurückgeführt. Diese Menge besteht aus der Gesamtheit aller Werte, die das Produkt (2.) annimmt, wenn die reellen Größen $\eta_1, \eta_2, \ldots$ *unabhängig voneinander* variieren. Da nun, bei festem σ_0, der einzelne Faktor $(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{2\pi i \eta_n})^{-1}$ einen gewissen Kreis C_n durchläuft, wenn η_n von 0 bis 1 variiert, so ist V identisch mit der Menge aller Werte z einer komplexen Ebene, die durch „Multiplikation der unendlich vielen Kreise C_n" entstehen, d. h. der Menge aller Werte $z = z_1 \cdot z_2 \cdots z_n \cdots$, wobei z_1 ein beliebiger Punkt auf C_1, z_2 ein beliebiger Punkt auf C_2, usw. ist. Nun lehrt eine geometrische Überlegung*), daß es zu jedem beliebig großen R ein $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(R) > 1$ gibt, so daß für

*) Vgl. die in Anmerkung S. 249 zitierte Abhandlung.

jedes σ_0 zwischen 1 und $\overline{\sigma}_0$ die durch die „Kreismultiplikation" entstehende Menge $V(\sigma_0)$ sämtliche Punkte des Kreises $|z| \leqq R$ enthält. Hieraus folgt alsdann vermöge des obigen Satzes über $U(\sigma_0)$, daß bei jedem hinreichend nahe an 1 gelegenen $\sigma_0 > 1$ die Funktion $\zeta(s)$ auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ Werte annimmt, die in einem beliebig gegebenen, ganz im Endlichen gelegenen Bereiche der ζ-Ebene überall dicht liegen.

Diese schon bekannten Tatsachen über das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ legen die Vermutung nahe, daß die Werte, welche $\zeta(s)$ *auf der Begrenzungsgeraden* $\sigma = 1$ dieser Halbebene annimmt, in der ganzen ζ-Ebene überall dicht liegen. Zu entscheiden, ob dies tatsächlich der Fall ist, war aber bisher noch nicht gelungen*). Man könnte zunächst glauben, daß die Methode, welche in der oben referierten Untersuchung zum Studium des Wertevorrates der ζ-Funktion auf einer in der Halbebene $\sigma > 1$ gelegenen vertikalen Geraden benutzt wurde, auch zum Studium des Wertevorrates auf der Geraden $\sigma = 1$ verwandt werden könnte, und zwar mit dem Resultate, daß $\zeta(1 + it)$ jedem gegebenen komplexen a beliebig nahe kommt. In der Tat, es konvergiert für $t \geqq 0$ das Produkt $\Pi(1 - p_n^{-(1+it)})^{-1}$ und ist gleich $\zeta(1 + it)$. Wenn also wie oben

$$F_N(1 + it) = \prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-(1+it)})^{-1}, \quad R_N(1 + it) = \prod_{n=N+1}^{\infty} (1 - p_n^{-(1+it)})^{-1}$$

gesetzt wird, so wäre der Beweis geführt, wenn es gelänge, ein solches t_0 anzugeben, daß *gleichzeitig*

$$|F_N(1 + it_0) - a| < \varepsilon, \quad |R_N(1 + it_0) - 1| < \varepsilon$$

ist. Was die erste dieser beiden Ungleichungen betrifft, so kann man genau wie oben verfahren. Wegen der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1}$ läßt sich nämlich zeigen, daß für alle hinreichend großen N die Menge V_N aller Zahlen

$$F_N(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N) = \prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-1} e^{2\pi i \eta_n})^{-1} \qquad (0 \leqq \eta_n < 1)$$

den vorgegebenen Wert a enthält, und sodann mit Hilfe des *Kronecker*schen Satzes die Existenz eines solchen t_0 beweisen, daß

*) Das Äußerste, was man bisher über die Verteilung der Werte von $\zeta(1 + it)$ wußte, war das von *Bohr* (Note sur la fonction Zeta de *Riemann* $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$ sur la droite $\sigma = 1$, Dänische Akademie, 1913) festgestellte Resultat, daß $\zeta(1 + it)$ auf jedem Radiusvektor $\theta = \theta_0$, $0 < r < \infty$ in der $\zeta = re^{i\theta}$-Ebene unendlich viele Werte annimmt, und zwar solche mit beliebig großem und solche mit beliebig kleinem r.

$$|F_N(1+it_0)-a|<\varepsilon$$

ist. Der Beweis wäre daher ganz wie oben zu führen, wenn das Produkt $\Pi(1-p_n^{-(1+it)})^{-1}$ für *alle* t — abgesehen natürlich von einer auszuschneidenden Umgebung des Punktes $t=0$ — *gleichmäßig* konvergierte. Dies ist aber nicht der Fall; vielmehr läßt sich zu jedem N ein beliebig großes t so angeben, daß $R_N(1+it)$ absolut genommen beliebig groß ist. Die obige Methode der Abschätzung des Restes R_N und der Verwendung des *Kronecker*schen Satzes für den Anfang F_N scheint daher zunächst hier prinzipiell zu versagen*).

In der Tat aber werden wir in der vorliegenden Arbeit zeigen, daß es möglich ist, diese Methode so zu vertiefen, daß sie auch für die Untersuchung der Funktion $\zeta(s)$ auf der Geraden $\sigma=1$ verwendbar wird. Zu diesem Zwecke benutzen wir zunächst zur Abschätzung des Restes R_N die aus einem Satze von *Schnee* über Mittelwerte *Dirichlet*scher Reihen leicht zu folgernde Tatsache, daß das Produkt $\Pi(1-p_n^{-(1+it)})^{-1}$, obwohl es nicht für alle $|t|>1$ gleichmäßig konvergiert, doch „*fast überall*" *gleichmäßig* konvergiert, in dem Sinne, daß es zu jedem positiven ε und δ ein $N_0=N_0(\varepsilon,\delta)$ gibt mit folgender Eigenschaft: Für jedes feste $N>N_0$ ist die Gesamtlänge der Intervalle für t zwischen $-T$ und T, für die

$$|R_N(1+it)-1|\geqq\varepsilon$$

ausfällt, bei hinreichend großem T kleiner als $\delta\cdot T$.

Damit aber ist die Schwierigkeit noch keineswegs überwunden. Denn bei festem, hinreichend großem N könnten die Werte von t, für die $|F_N(1+it)-a|<\varepsilon$ ist, sämtlich in den oben bezeichneten Intervallen liegen, in denen $|R_N(1+it)-1|\geqq\varepsilon$ ist, trotzdem die relative Gesamtlänge dieser Intervalle asymptotisch sehr klein wird.

Man kann nun aber, um genauere Auskunft über $F_N(1+it)$ zu erhalten, statt des gewöhnlichen *Kronecker*schen Satzes, der aussagt, daß bei festem N die oben definierten, aus $(t\lambda_1, t\lambda_2, \ldots t\lambda_N)$ durch Reduktion der Koordinaten modulo 1 entstehenden Punkte P_t im N-dimensionalen Einheitswürfel überall dicht liegen, eine weitergehende, übrigens aus dem *Kronecker*-

*) Daß das Produkt bei jedem $T>0$ im Intervalle $|t|<T$, wenn eine Umgebung von $t=0$ ausgeschnitten wird, gleichmäßig konvergiert, nützt uns natürlich nichts; die obige Methode verlangt mehr, nämlich gleichmäßige Konvergenz in einem nach wenigstens einer Seite *ins Unendliche* reichenden Intervall.

schen Satze leicht zu folgernde Tatsache heranziehen, nämlich die, daß der Punkt P_t, wenn t ins Unendliche wächst, nicht nur in die Nähe jeder Stelle des Einheitswürfels gelangt, sondern auch *gleichmäßig überall* hinkommt, d. h. die Umgebung keines Punktes bevorzugt. Durch Benutzung dieser Bemerkung gelingt es, nicht nur die Frage zu behandeln, in welche Gebiete die Größe $F_N(1+it)$ hinkommt, sondern auch „wie oft" für wachsendes t sie in ein solches Gebiet fällt; mit anderen Worten, man kann gewissermaßen die *Wahrscheinlichkeit* dafür bestimmen, daß $F_N(1+it)$ in einem gewissen Gebiete, speziell einer festen Umgebung des Punktes a, liegt. Diese Wahrscheinlichkeit gibt, um sie genauer zu definieren, die relative Gesamtlänge der Intervalle zwischen 0 und T an, für die $F_N(1+it)$ in das gegebene Gebiet fällt, im Limes für unbegrenzt wachsendes T.

Wenn nun auch, bei wachsendem N, das von F_N überdeckte Gebiet nach allen Richtungen ins Unendliche wächst, so zeigt es sich doch — und das ist hier die entscheidende Tatsache —, daß für eine vorgegebene Umgebung des Punktes a die obige Wahrscheinlichkeit nicht gegen Null konvergiert, sondern sogar für hinreichend große N größer als eine positive, von N unabhängige Zahl bleibt. Bedenkt man nunmehr, daß die obige Bemerkung über den Rest $R_N(1+it)$ sich gewissermaßen so ausspricht: die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $|R_N(1+it)-1| \geqq \varepsilon$ ist, wird kleiner als eine beliebig kleine Größe, wenn nur N hinreichend groß ist, so gelangt man schließlich zu dem erwünschten Resultate, nämlich zu der Existenz eines $t=t_0$, für das *gleichzeitig*

$$|F_N(1+it_0)-a|<\varepsilon, \quad |R_N(1+it_0)-1|<\varepsilon$$

ist. *Es kommt also in der Tat $\zeta(1+it)$ dem Werte a beliebig nahe.*

Es ergibt sich ferner, daß die soeben dargelegte Methode erlaubt, das Verhalten von $\zeta(s)$ nicht nur auf der Geraden $\sigma=1$, sondern auf jeder Geraden $\sigma=\sigma_0$, wo $\frac{1}{2}<\sigma_0\leqq 1$ ist, zu studieren, und zwar mit dem Resultate, daß sogar auf jeder dieser Geraden die Werte von $\zeta(s)$ einem beliebig gegebenen Werte a beliebig nahe kommen. Für solche Geraden, die links von $\sigma=1$ liegen, scheint die Methode uns darum besonders bemerkenswert, weil sie gewissermaßen auf der Produktdarstellung von $\zeta(s)$ beruht, obwohl das Produkt in keinem Punkte mit $\sigma<1$ konvergiert. Die dabei scheinbar auftretende Konvergenzschwierigkeit kann man nämlich mit Hilfe des *Schnee*schen Mittelwertsatzes umgehen, wenn man den Rest

$R_N(\sigma_0+it)$ nicht durch ein unendliches Produkt definiert, sondern einfach als den Quotienten $R_N(\sigma_0+it)=\frac{\zeta(\sigma_0+it)}{F_N(\sigma_0+it)}$, wo $F_N(\sigma_0+it)$ wie oben das Anfangsprodukt bezeichnet.

Die Überlegungen, welche dieses weitergehende Resultat liefern, sind von den oben angedeuteten für die Gerade $\sigma=1$ anzuwendenden Betrachtungen so wenig verschieden, daß es zwecklos wäre, den Fall $\sigma_0=1$ für sich zu behandeln; wir werden sofort den allgemeinen Fall $\frac{1}{2}<\sigma_0\leqq 1$ ins Auge fassen und demgemäß das folgende Theorem beweisen: *Die Menge der Werte, welche $\zeta(s)=\zeta(\sigma+it)$ bei festem σ_0 im Intervalle $\frac{1}{2}<\sigma_0\leqq 1$ auf der vertikalen Geraden $\sigma=\sigma_0$ annimmt, liegt in der ganzen ζ-Ebene überall dicht.*

In § 1 der folgenden Ausführungen schätzen wir den Rest R_N mit Hilfe des *Schnee*schen Mittelwertsatzes ab. In § 2 erinnern wir an einige für den Beweis wesentliche Tatsachen aus der Theorie der *Diophant*ischen Approximationen. § 3 enthält eine Untersuchung über die bei der Addition gewisser konvexer Kurven auftretenden geometrischen Wahrscheinlichkeiten. Schließlich werden wir in § 4 zunächst auf Grund der Ergebnisse von § 2, § 3 das Anfangsprodukt F_N untersuchen und sodann unter Heranziehung des Resultates von § 1 den Beweis des Hauptsatzes vollenden.

§ 1. Abschätzung des Restgliedes.

Es sei $N\geqq 1$ eine ganze Zahl und es werde

$$R_N(s)=\zeta(s)\prod_{n=1}^{N}(1-p_n^{-s})$$

gesetzt. Die hierdurch definierte Funktion $R_N(s)$ ist in der ganzen $s=\sigma+it$-Ebene regulär bis auf den Punkt $s=1$ (wo sie einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $\prod_{n=1}^{N}(1-p_n^{-1})$ besitzt). Wir beweisen über $R_N(s)$ den folgenden Satz:

Hilfssatz I: *Es sei σ_0 eine feste Zahl des Intervalles $\frac{1}{2}<\sigma_0\leqq 1$; es seien ferner ε und δ beliebige positive Zahlen. Dann gibt es dazu ein ganzzahliges $N_0=N_0(\sigma_0,\varepsilon,\delta)$ mit folgender Eigenschaft: Bei jedem festen $N>N_0$ ist die Summe $\mu(T)$ der Längen der Intervalle*) der reellen Vari-*

*) Daß diejenigen Punkte t zwischen $-T$ und $+T$, für welche $|R_N(\sigma_0+it)-1|\geqq\varepsilon$ ist, höchstens eine endliche Anzahl von Intervallen bilden, folgt unmittelbar daraus, daß in der z-Ebene das dem Intervall $-T\leqq t\leqq T$ entsprechende analytische Kurven-

ablen t zwischen $-T$ und $+T$, für die $|R_N(\sigma_0+it)-1| \geqq \varepsilon$ ist, für jedes hinreichend große T, d. h. für $T \geqq T_0 = T_0(N)$, kleiner als $\delta \cdot T$.

Beweis: Es wird die ganze transzendente Funktion $\zeta(s)(1-2^{1-s})$ in der Halbebene $\sigma > 0$ durch die dort konvergente *Dirichlet*sche Reihe $1-2^{-s}+3^{-s}-4^{-s}+\cdots$ dargestellt. Ebenso ist für jedes N die ganze transzendente Funktion

$$G_N(s) = (R_N(s)-1)(1-2^{1-s})$$

durch eine für $\sigma > 0$ konvergente *Dirichlet*sche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^{(N)}}{n^s}$ darstellbar; dies folgt z. B. unmittelbar daraus, daß

$$G_N(s) = \left\{\zeta(s)\prod_{n=1}^{N}(1-p_n^{-s})-1\right\}\cdot\{1-2^{1-s}\} = \{\zeta(s)(1-2^{1-s})\}\prod_{n=1}^{N}(1-p_n^{-s})-(1-2^{1-s})$$

ist, also bis auf zwei Glieder als das Produkt einer für $\sigma > 0$ konvergenten und einer aus nur endlich vielen Gliedern bestehenden *Dirichlet*schen Reihe erscheint. Aus der Definition von $G_N(s)$ folgt sofort, daß

$$(4.) \qquad \begin{cases} b_n^{(N)} = 0 & \text{für } n < p_{N+1}, \\ |b_n^{(N)}| \leqq 2 & \text{für } n \geqq p_{N+1} \end{cases}$$

ist. Wir wenden auf die Funktion $G_N(s)$ den folgenden von *Schnee**) herrührenden Satz an: *Es sei $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ eine für $\sigma > 0$ konvergente Dirichletsche Reihe; dann gilt bei jedem $\sigma > \frac{1}{2}$ die Identität*

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(\sigma+it)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}.$$

Angewandt auf die Funktion $f(s) = G_N(s)$ und die Zahl $\sigma = \sigma_0$ ergibt dieser Satz die Relation

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |G_N(\sigma_0+it)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n^{(N)}|^2}{n^{2\sigma_0}} = \alpha_N (>0);$$

also ist für $T \geqq T_0 = T_0(N)$, wobei wir zweckmäßigerweise $T_0 > 1$ annehmen,

$$(5.) \qquad \int_{-T}^{T} |G_N(\sigma_0+it)|^2 dt < 3\alpha_N T.$$

---

stück $z = R_N(\sigma_0+it)-1$ (welches für $\sigma_0 \neq 1$ überall, für $\sigma_0 = 1$ überall bis auf den Pol $t=0$ der Funktion $R_N(1+it)$ regulär ist) mit dem Kreise $|z| = \varepsilon$ entweder höchstens eine endliche Anzahl gemeinsamer Punkte haben kann, oder ganz auf diesem Kreise liegen muß. (Dies letztere ist übrigens nicht der Fall; denn sonst wäre für *alle* t der absolute Betrag von $R_N(\sigma_0+it)-1$ konstant, was z. B. mit der bekannten Aussage: $\limsup_{t=\infty} |R_N(\sigma_0+it)| = \infty$ nicht verträglich ist.)

*) Vgl. z. B. *Landau:* Handbuch von der Verteilung der Primzahlen, Bd. II, S. 799.

Wegen (4.) ist gewiß

$$\alpha_N \leqq 4 \cdot \sum_{n=p_{N+1}}^{\infty} \frac{1}{n^{2\sigma_0}},$$

also bei festem σ_0 im Intervalle $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leqq 1$

$$\lim_{N=\infty} \alpha_N = 0. \tag{6.}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle: $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$ und $\sigma_0 = 1$.

1) Es sei $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$. Dann ist auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$

$$|1 - 2^{1-s}| \geqq 2^{1-\sigma_0} - 1 = k(\sigma_0) > 0;$$

also folgt aus (5.), wegen $G_N(s) = (R_N(s) - 1)(1 - 2^{1-s})$, für $T \geqq T_0 = T_0(N)$

$$\int_{-T}^{T} |R_N(\sigma_0 + it) - 1|^2 dt < \frac{3\alpha_N}{k^2} \cdot T.$$

Aus der letzten Ungleichung ergibt sich sofort, daß für $T \geqq T_0$ die Gesamtlänge der Intervalle zwischen $-T$ und $+T$, für die $|R_N(\sigma_0 + it) - 1| \geqq \varepsilon$ ist, kleiner ist als $\frac{3\alpha_N}{k^2\varepsilon^2} \cdot T$. Wir wählen nun, was nach (6.) möglich ist, ein solches N_0, daß für $N > N_0$

$$\frac{3\alpha_N}{k^2\varepsilon^2} < \delta, \quad \text{d. h.} \quad \alpha_N < \frac{\delta k^2 \varepsilon^2}{3} = \frac{\delta(2^{1-\sigma_0} - 1)^2 \varepsilon^2}{3}$$

wird. Für dieses N_0 ist alsdann die Behauptung des Hilfssatzes offenbar erfüllt.

2) Es sei $\sigma_0 = 1$. Dann müssen wir mit Rücksicht auf die Nullstellen $1 + \frac{2\pi i \nu}{\log 2}$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) des hineingebrachten Faktors $1 - 2^{1-s}$ das Verfahren ein wenig modifizieren. Wir schneiden aus der Geraden $\sigma = 1$ unendlich viele Intervalle der gleichen Länge δ_1 aus, welche diese Nullstellen als Mittelpunkte haben und wobei $\delta_1 = \delta_1(\delta)$ so gewählt ist, daß die Gesamtlänge der zwischen $-T$ und $+T$ ausgeschnittenen Intervalle für hinreichend große T, etwa für $T > 1$, kleiner ist als $\frac{\delta}{2} T$. Auf dem ganzen übrigen Teil der Geraden $\sigma = 1$ ist wegen der Periodizität von $1 - 2^{1-s}$

$$|1 - 2^{1-s}| > k > 0,$$

wo $k = k(\delta_1) = k(\delta)$ nicht von t abhängt. Nach (5.) ist für $T \geqq T_0 = T_0(N)$

$$\int_{-T}^{T} |G_N(1 + it)|^2 dt < 3\alpha_N T,$$

also erst recht

$$(7.) \qquad \int_{-T}^{T}{}' |G_N(1+it)|^2 dt < 3\alpha_N T,$$

wobei dies letzte Integral nur über den Teil des Intervalles erstreckt wird, der außerhalb der ausgeschnittenen Intervalle von der Breite δ_1 liegt. Aus (7.) folgt nunmehr

$$\int_{-T}^{T}{}' |R_N(1+it)-1|^2 dt < \frac{3\alpha_N}{k^2} T.$$

Hieraus ergibt sich, daß für $T \geqq T_0$ die Gesamtlänge der Teilintervalle des letzten Integrationsweges, auf denen $|R_N(1+it)-1| \geqq \varepsilon$ ist, kleiner ist als $\frac{3\alpha_N}{k^2\varepsilon^2} \cdot T$. Wir wählen nun, was nach (6.) möglich ist, ein solches N_0, daß für $N > N_0$

$$\frac{3\alpha_N}{k^2\varepsilon^2} < \frac{\delta}{2}$$

wird. Dann ist gewiß für jedes $N > N_0$ und $T \geqq T_0 = T_0(N) \geqq 1$ die Gesamtlänge der Teile des Intervalles von $-T$ bis $+T$, für die $|R_N(1+it)-1| \geqq \varepsilon$ ist, kleiner als $\frac{\delta}{2} T + \frac{\delta}{2} T = \delta T$. Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

§ 2. Hilfssätze aus der Theorie der *Diophant*ischen Approximationen.

Wir werden in diesem Paragraphen einige im wesentlichen bekannte Tatsachen aus der Theorie der *Diophant*ischen Approximationen zusammenstellen, die für die weiteren Ausführungen in § 4 ausschlaggebend sein werden.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, ist das wesentlichste Hilfsmittel, das wir aus dieser Theorie zu entnehmen haben, der folgende von *Kronecker* herrührende Satz:

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_N$ linear unabhängige reelle Zahlen, d. h. es bestehe keine Relation $c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_N\lambda_N = 0$ mit rationalen nicht sämtlich verschwindenden c_n; es seien ferner $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_N$ beliebige reelle Zahlen. Dann gibt es zu jedem positiven ε ein positives t und dazu gehörige ganze rationale Zahlen $g_1, g_2, \ldots g_N$, so daß die N Ungleichungen

$$|t\lambda_n - \mu_n - g_n| < \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots N)$$

sämtlich erfüllt sind.

Aus dem Satze folgt sofort, daß diese Ungleichungen erfüllbar sind durch gewisse *beliebig große* t, d. h. daß man $t > t_0$ annehmen darf. Zum Beweise braucht man nur $t = t_0 + \tau$ zu setzen.

Geometrisch sagt der *Kronecker*sche Satz aus, daß im N-dimensionalen Einheitswürfel Q die Menge A der Punkte $P_t\,(0<t<\infty)$, die aus den Punkten $(t\lambda_1, t\lambda_2, \ldots t\lambda_N)$ durch Reduktion der Koordinaten modulo 1 entstehen, *überall dicht liegt.* Betrachten wir zum Beispiel den Fall $N=2$, so besteht die Menge der Punkte P_t, die den Werten t zwischen 0 und T entsprechen, aus einer endlichen Anzahl paralleler Strecken (siehe Fig. 1), deren Endpunkte — abgesehen höchstens vom Endpunkte P_T — auf den Seiten des Einheitsquadrates Q liegen, und deren Richtung durch den Quotienten $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ gegeben ist. Es besagt also hier der Satz, daß es keinen Parallelstreifen dieser Richtung gibt, der Q durchsetzt und für unbegrenzt wachsendes T von diesen Strecken frei bleibt.

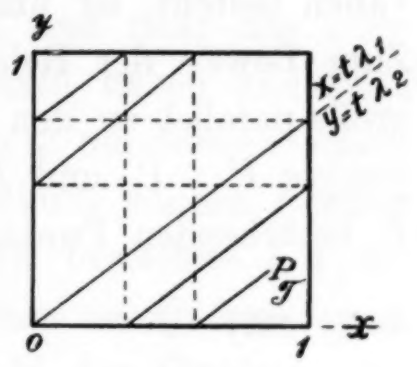

Fig. 1.

Aus dem *Kronecker*schen Satze ergibt sich als eine leicht zu ziehende Folgerung die für unsere Zwecke wesentliche Tatsache, daß die Punktmenge A aller Punkte P_t im Einheitswürfel nicht nur überall dicht liegt, sondern auch daß sie dort „*überall gleich dicht*" liegt, d. h. daß der folgende Satz*) gilt:

Es seien die reellen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_N$ linear unabhängig. Es sei im N-dimensionalen Einheitswürfel Q: $0 \leqq \eta_n < 1\ (n=1,2,\ldots N)$ des $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N$-Raumes ein parallel den Achsen orientierter Würfel Ω: $\bar{\eta}_n \leqq \eta_n < \bar{\eta}_n + d$ mit der Seitenlänge $d<1$ gegeben. Es bedeute $M = M(\Omega, T)$ die Menge aller Werte t im Intervalle $0 \leqq t \leqq T$, für die der aus $(t\lambda_1, t\lambda_2, \ldots t\lambda_N)$ durch Reduktion der Koordinaten modulo 1 entstehende Punkt P_t dem Würfel Ω angehört. Dann besteht bei jedem $T>0$ die Menge M aus einer endlichen Anzahl von Intervallen. Bezeichnet $\mathsf{M}(T)$ die Summe der Längen dieser Intervalle, so ist

$$\lim_{T=\infty} \frac{\mathsf{M}(T)}{T} = d^n, \tag{8.}$$

*) Herr *H. Weyl* hat in der Mathematischen Gesellschaft in Göttingen (Juli 1913) einen Beweis des *Kronecker*schen Satzes mitgeteilt, der gleichzeitig die überall gleichmäßige Dichte der Punktmenge A in Evidenz setzt. Bei dieser Gelegenheit wurde wohl zum ersten Male diese Gleichmäßigkeitseigenschaft für beliebige N explizite ausgesprochen.

d. h. der Quotient $\frac{\mathsf{M}(T)}{T}$ *strebt für unendlich wachsendes T gegen den Raum-inhalt des Würfels* Ω.

Beweis: Wir betrachten in den folgenden Darlegungen, um die Ideen zu fixieren, den Fall $N = 2$; der Beweis dieses Spezialfalles überträgt sich unmittelbar auf den Fall eines beliebigen N.

Die Tatsache, daß $M(\Omega, T)$ aus einer endlichen Anzahl von Intervallen besteht, ist unmittelbar einzusehen (Siehe die obige typische Fig. 1). Zum Beweis der Relation (8.) zeigen wir zunächst, daß für zwei gleichgroße parallel zu den Achsen orientierte Quadrate Ω_1 und Ω_2, deren Mittelpunkte $P' = P_{t_1}$ und $P'' = P_{t_2}$ *erreichbar* sind, d. h. der aus allen Punkten P_t bestehenden Punktmenge A angehören,

$$\lim_{T=\infty} \frac{\mathsf{M}_1(T)}{\mathsf{M}_2(T)} = 1 \tag{9.}$$

gilt.

Um im folgenden eine den Rand betreffende, im Wesen der Sache nicht liegende Schwierigkeit bei der Darstellung zu vermeiden, ziehen wir vor, die Relation (9.) nicht nur für solche Quadrate Ω_1, Ω_2, welche ganz dem Einheitsquadrate Q angehören, zu beweisen, sondern allgemeiner für ein beliebiges Paar von gleichgroßen Quadraten mit der Seitenlänge $d < 1$, deren Mittelpunkte erreichbare Punkte P_{t_1} und P_{t_2} in Q sind, während Ω_1 und Ω_2 selbst über den Rand von Q hinausragen dürfen. Hierbei ist natürlich t dann als zur Menge $M(\Omega, T)$ gehörig zu betrachten, wenn bei passender, nicht notwendig zum Punkte P_t im Einheitsquadrate Q führender Reduktion der Koordinaten modulo 1 der Punkt $(t\lambda_1, t\lambda_2)$ in Ω fällt.

Zum Beweise von (9.) bemerken wir, daß offenbar für jedes $t > k$, wo $k = k(t_1, t_2)$ eine passend zu wählende Konstante ist, der Punkt $(t\lambda_1, t\lambda_2)$ dann und nur dann (nach Reduktion) in Ω_1 fällt, wenn (nach Reduktion) der Punkt $((t - t_1 + t_2)\lambda_1, (t - t_1 + t_2)\lambda_2)$ in Ω_2 fällt. Also ist für alle T

$$|\mathsf{M}_2(T) - \mathsf{M}_1(T)| < \text{const.} .$$

Hieraus ergibt sich (9.) unmittelbar, wenn noch berücksichtigt wird, daß

$$\lim_{T=\infty} \mathsf{M}_1(T) = \infty$$

ist; diese letzte Tatsache aber folgt sofort daraus, daß einerseits, wenn für ein t' der Punkt $(t'\lambda_1, t'\lambda_2)$ nach Reduktion sehr nahe $\left(\text{etwa näher als } \frac{d}{4}\right)$

am Mittelpunkte P_{t_1} von Ω_1 liegt, es dann gewiß ein Intervall mit dem Mittelpunkte t' und einer nur von d, λ_1, λ_2 abhängigen Länge gibt, für das nach Reduktion $(t\lambda_1, t\lambda_2)$ ebenfalls in Ω_1 liegt, während andererseits beliebig große solche t' existieren.

Es ist nunmehr leicht, den obigen Satz zu beweisen. Zu diesem Zwecke bedecken wir das Einheitsquadrat Q zweimal mit gleichgroßen, parallel zu den Achsen orientierten Quadraten der Seitenlänge $\delta < 1$, deren Mittelpunkte sämtlich erreichbare Punkte in Q sind, und zwar das erste Mal so, daß diese Quadrate keine gemeinsamen Punkte haben und ganz in Q liegen, das zweite Mal so, daß jeder Punkt von Q mindestens einem dieser Quadrate angehört. — Bei der zweiten Überdeckung können gewisse Quadrate über den Rand von Q hinausragen. — Es bezeichne l, λ die Anzahl der Quadrate der ersten Überdeckung, die ganz in Q, bzw. ganz in dem gegebenen Quadrat Ω liegen, L, Λ die Anzahl der Quadrate der zweiten Überdeckung, die mindestens einen Punkt von Q, bzw. von Ω enthalten (l, L sind also die Gesamtanzahlen der Quadrate bei der ersten, bzw. zweiten Überdeckung). Da — nach dem *Kronecker*schen Satze — die erreichbaren Punkte überall dicht liegen, so können wir bei passender Wahl der Seitenlänge δ die beiden Bedeckungen so einrichten, daß bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$

$$(10.) \qquad d^2 - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\lambda}{L} \leqq \frac{\Lambda}{l} < d^2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Nun ist offenbar

$$\sum_{(\lambda)} \mathsf{M}'_\delta(T) \leqq \mathsf{M}(T) \leqq \sum_{(\Lambda)} \mathsf{M}''_\delta(T),$$

$$\sum_{(l)} \mathsf{M}'_\delta(T) \leqq T \leqq \sum_{(L)} \mathsf{M}''_\delta(T),$$

wo M'_δ bzw. M''_δ die zu den Quadraten der ersten bzw. zweiten Überdeckung gehörigen Summen der Längen der entsprechenden Intervalle für t zwischen 0 und T sind, und in ohne weiteres verständlicher Weise die unter den Summenzeichen stehenden Buchstaben die Anzahl der auftretenden Summanden bedeuten. Durch Division folgt

$$(11.) \qquad \frac{\sum_{(\lambda)} \mathsf{M}'_\delta(T)}{\sum_{(L)} \mathsf{M}''_\delta(T)} \leqq \frac{\mathsf{M}(T)}{T} \leqq \frac{\sum_{(\Lambda)} \mathsf{M}''_\delta(T)}{\sum_{(l)} \mathsf{M}'_\delta(T)}.$$

Nunmehr strebt nach dem obigen Resultate über gleichgroße Quadrate mit erreichbarem Mittelpunkte die linke, bzw. rechte Seite von (11.)

mit wachsendem T gegen $\frac{\lambda}{L}$, bzw. $\frac{\Lambda}{l}$, ist also bei hinreichend großem T, d. h. für $T > T_0$, größer als $\frac{\lambda}{L} - \frac{\varepsilon}{2}$, bzw. kleiner als $\frac{\Lambda}{l} + \frac{\varepsilon}{2}$. Nach (10.) ist daher für $T > T_0 = T_0(\varepsilon)$

$$d^2 - \varepsilon < \frac{\mathsf{M}(T)}{T} < d^2 + \varepsilon,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Aus diesem Resultate folgt sofort allgemeiner der folgende Satz:

Hilfssatz II: *Es sei Ω ein meßbares*) Gebiet in Q und W sein Inhalt. Es sei ferner $M(\Omega, T)$ die Menge aller Werte t zwischen 0 und T, für die P_t in Ω fällt, $\underset{e}{\mathsf{M}}(T)$, $\underset{i}{\mathsf{M}}(T)$ das äußere bzw. innere Maß**) der linearen Punktmenge M. Dann ist*

$$\lim_{T=\infty} \frac{\underset{e}{\mathsf{M}}(T)}{T} = \lim_{T=\infty} \frac{\underset{i}{\mathsf{M}}(T)}{T} = W.$$

Beweis: Wir betrachten wieder den Fall $N = 2$. Es sei also Ω ein meßbares, dem Quadrate Q: $0 \leqq \eta_n < 1$ $(n = 1, 2)$ angehöriges Gebiet mit dem Inhalte W. Dann läßt sich zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Einteilung von Q in endlich viele gleichgroße Quadrate der Seitenlänge δ derart angeben, daß, wenn N_1 die Anzahl der Quadrate bezeichnet, die ganz in Ω liegen, N_2 die Anzahl derjenigen, die mindestens einen Punkt von Ω enthalten, die Ungleichungen

$$N_1 \delta^2 > W - \varepsilon, \qquad N_2 \delta^2 < W + \varepsilon$$

erfüllt sind. Da nun aber der zu beweisende Satz für jedes Quadrat $\bar{\eta}_n \leqq \eta_n < \bar{\eta}_n + \delta$ $(n = 1, 2)$ richtig ist, so folgt er jetzt sofort für Ω; denn es ist $\underset{i}{\mathsf{M}}(T) \geqq \sum_{(N_1)} \mathsf{M}_\delta(T)$, $\underset{e}{\mathsf{M}}(T) \leqq \sum_{(N_2)} \mathsf{M}_\delta(T)$, wobei diese Summen über die N_1 bzw. N_2 obigen Quadrate der Seitenlänge δ zu erstrecken sind, für die ja nach dem Vorangehenden $\underset{e}{\mathsf{M}}_\delta(T) = \underset{i}{\mathsf{M}}_\delta(T) = \mathsf{M}_\delta(T)$ ist. Wegen

$$\lim_{T=\infty} \frac{\mathsf{M}_\delta(T)}{T} = \delta^2$$

ist also

$$\liminf_{T=\infty} \frac{\underset{i}{\mathsf{M}}(T)}{T} \geqq N_1 \delta^2 > W - \varepsilon, \quad \limsup_{T=\infty} \frac{\underset{e}{\mathsf{M}}(T)}{T} \leqq N_2 \delta^2 < W + \varepsilon.$$

---

*) Die Begriffe: „meßbar", „Maß", „Inhalt" etc. sind in dieser Arbeit überall im *Jordan*schen Sinne gemeint. Vgl. *Jordan*, Cours d'Analyse t. I.

**) Es ist nicht notwendig $\underset{e}{\mathsf{M}}(T)$ gleich $\underset{i}{\mathsf{M}}(T)$, d. h. die Menge M braucht nicht meßbar zu sein.

Da aber $\underset{i}{\mathsf{M}}(T) \leqq \underset{e}{\mathsf{M}}(T)$ gilt, so folgt

$$\lim_{T=\infty} \frac{\underset{i}{\mathsf{M}}(T)}{T} = \lim_{T=\infty} \frac{\underset{e}{\mathsf{M}}(T)}{T} = W, \qquad \text{q. e. d. *)}$$

§ 3. Über die Addition gewisser konvexer Kurven und zugehörige geometrische Wahrscheinlichkeiten.

Bei der Untersuchung des Anfangsproduktes

$$F_N(\sigma_0 + it) = \prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-(\sigma_0+it)})^{-1}$$

wird es in § 4 zweckmäßig sein, statt F_N den Logarithmus von F_N zu betrachten, d. h. statt des obigen Produktes die Summe

$$L_N(\sigma_0 + it) = -\sum_{n=1}^{N} \log (1 - p_n^{-(\sigma_0+it)}).$$

In diesem Paragraphen studieren wir an Stelle dieser Funktion $L_N(\sigma_0 + it)$ der einen reellen Variablen t eine Funktion der N unabhängigen reellen Variablen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N$, nämlich die Summe $\sum_{n=1}^{N} \log (1 - p_n^{-\sigma_0} e^{2\pi i \eta_n})$. Mit Hilfe der Theorie der *Diophant*ischen Approximationen werden wir dann in § 4 aus den Eigenschaften dieser Funktion auf die Eigenschaften der Funktion $L_N(\sigma_0 + it)$ schließen.

Um im folgenden das Wesentliche der Betrachtung deutlicher hervortreten zu lassen, ziehen wir vor, allgemeiner die Summe

$$S_N(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N) = \sum_{n=1}^{N} \log (1 - r_n e^{2\pi i \eta_n})$$

zu untersuchen, wo N eine feste positive ganze Zahl ist und zunächst $r_1, r_2, \ldots r_N, \ldots$ eine beliebige Folge positiver Zahlen kleiner als 1 sind; dabei ist für $\log (1 - r_n e^{2\pi i \eta_n})$ stets der Hauptwert zu nehmen. Wir betrachten in der Ebene der komplexen Variablen $z = S_N$ die Menge Σ_N aller Punkte

---

*) Es sei hervorgehoben, daß der Hilfssatz II ganz unrichtig sein würde, wenn man statt des *Jordan*schen den *Lebesgue*schen Maßbegriff zugrunde gelegt hätte. Das einfachste Beispiel, um dies zu illustrieren, ist der Fall, daß Ω aus allen Punkten P_t $(0 < t < \infty)$ besteht, d. h. mit der Menge A identisch ist. Diese im *Jordan*schen Sinne nicht meßbare Menge besitzt das *Lebesgue*sche Maß Null, weil sie aus einer abzählbaren Menge von geradlinigen Strecken besteht. Die Menge $M(\Omega, T)$ besteht aber aus *allen* Punkten zwischen 0 und T, so daß $\underset{i}{\mathsf{M}}(T) = \underset{e}{\mathsf{M}}(T) = \mathsf{M}(T) = T$ wird; es ist also der Grenzwert $\lim_{T=\infty} \frac{\mathsf{M}(T)}{T} = 1$ vorhanden, aber gewiß nicht mit dem Inhalte Null identisch.

$S_N(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N)$, die entstehen, wenn die Variablen $\eta_1, \ldots \eta_N$ unabhängig von einander die Intervalle $0 \leqq \eta_n < 1$ durchlaufen. Hierbei durchläuft $r_n e^{2\pi i \eta_n}$ einen Kreis mit dem Mittelpunkte Null und dem Radius $r_n < 1$. Wenn aber eine komplexe Zahl x_n einen Kreis $|x_n| = r_n < 1$ durchläuft, so durchläuft $\log(1 - x_n)$ eine konvexe Kurve*) Γ_n, die den Nullpunkt im Innern enthält; es ist somit Σ_N einfach die Punktmenge, welche durch „Addition" der N konvexen Kurven $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_N$ entsteht. Wir bemerken zur Orientierung, daß die Punktmenge Σ_N, wie sich aus dieser geometrischen Charakterisierung unschwer folgern läßt**), entweder aus dem Innern (inkl. Rand) einer konvexen Kurve oder aus dem Innern (inkl. Rand) eines von zwei ineinander liegenden konvexen Kurven begrenzten Ringes besteht. Von dieser letzten Tatsache werden wir jedoch keinen Gebrauch zu machen haben.

Es sei in der S_N-Ebene R ein beliebiges parallel zu den Koordinatenachsen orientiertes Rechteck mit dem Mittelpunkte z; hierbei verstehen wir unter einem achsenparallelen Rechteck der $z = u + iv$-Ebene stets eine durch Ungleichungen der Form $u_1 \leqq u < u_2$, $v_1 \leqq v < v_2$ definierte Punktmenge. Wir betrachten, bei festem N, die Punktmenge $\Omega = \Omega_N$ im N-dimensionalen Einheitswürfel Q $(0 \leqq \eta_n < 1)$ des $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N$-Raumes, für die der Punkt $S_N(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N)$ dem Rechtecke R angehört; dann behaupten wir:

I) Die Punktmenge Ω_N ist *meßbar;* wir nennen ihr Maß $W_R^{(N)}(z)$ die *Wahrscheinlichkeit* dafür, daß S_N dem Rechtecke R angehört.

---

*) Um die Konvexität dieser Kurve zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß der Winkel, den die Tangente an die Bildkurve $y = \log(1-x)$ mit der Abszissenachse der y-Ebene bildet, sich monoton ändert, wenn x den Kreis $x = re^{i\varphi}$ $(r < 1)$ im positiven Sinne durchläuft. Dieser Winkel ist aber gleich der Amplitude von $\frac{dy}{d\varphi} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{d\varphi} = \frac{1}{x-1} re^{i\varphi} i = \frac{ix}{x-1}$, und es ist also nur zu beweisen, daß die Amplitude von $\frac{ix}{x-1}$ sich monoton ändert; das aber folgt unmittelbar daraus, daß, wenn x den Kreis $|x| = r$ durchläuft, $\frac{ix}{x-1}$ ebenfalls einen Kreis durchläuft, und zwar einen solchen, der den Nullpunkt im Innern enthält.

**) *H. Bohr*, Om Addition af uendelig mange konvekse Kurver, Oversigt over Danske Vidensk. Selsk. Forhandl. 1913.

II) **Wenn das Rechteck R sich starr bewegt, so daß es achsenparallel bleibt, dann ist $W_R^{(N)}(z)$ eine *stetige Funktion* des Mittelpunktes z.**

III) **Es ist dann und nur dann $W_R^{(N)}(z) > 0$, wenn *im Innern* von R ein Punkt von Σ_N liegt; für alle anderen z ist $W_R^{(N)}(z) = 0$.**

IV) **Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes z die Ungleichung $W_R^{(N)}(z) < \varepsilon$ besteht, wenn nur der Flächeninhalt von R kleiner als δ ist.**

Zum Beweise betrachten wir zunächst den Fall $N = 1$, um dann durch vollständige Induktion das Resultat für beliebiges N zu erschließen. Im Falle $N = 1$, wo Σ_1 mit der konvexen Kurve Γ_1 identisch ist, besteht die eindimensionale Punktmenge Ω_1 ersichtlich aus einer endlichen Anzahl von Intervallen, da ja die Punkte der Kurve Γ_1, die zu R gehören, endlich viele (höchstens vier) zusammenhängende Stücke bilden und jedes dieser Stücke einem Intervall der Variablen η_1 entspricht. Diese Intervalle ändern sich stetig bei stetiger Verschiebung von R, und die Summe ihrer Längen, d. h. die Zahl $W_R^{(1)}$ ist daher eine stetige Funktion des Mittelpunktes z; diese Funktion ist ferner dann und nur dann größer als Null, wenn ein Punkt von Γ_1 im Innern von R liegt. Schließlich ist klar, daß für alle z bei hinreichend kleinem Flächeninhalt von R die Wahrscheinlichkeit $W_R^{(1)}$ kleiner als eine beliebig gegebene positive Größe ε ist; denn, wenn der Flächeninhalt von R kleiner als δ ist, so ist mindestens eine der Seitenlängen kleiner als $\sqrt{\delta}$, und es ist einleuchtend, daß die Summe der höchstens zwei Kurvenstücke der Kurve $\Gamma_1 : \log(1 - r_1 e^{2\pi i \eta_1})$, die in einen Parallelstreifen der Breite $\sqrt{\delta}$ fallen, und damit die Summe der entsprechenden Intervalle für η_1 bei hinreichend kleinem δ beliebig klein wird. Damit sind die Behauptungen I, ... IV für den Fall $N = 1$ bewiesen.

Wir nehmen nun an, daß die Behauptungen für irgendein N richtig sind, und wollen sie hieraus für den Fall $N + 1$ folgern.

Hierzu betrachten wir wieder ein festes achsenparalleles Rechteck R etwa mit dem Mittelpunkte z_0 und fassen die Punktmenge Ω_{N+1} im $(N+1)$-dimensionalen Einheitswürfel $0 \leqq \eta_n < 1$ $(n = 1, 2, \ldots N+1)$ ins Auge, für die der Punkt $S_{N+1}(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{N+1})$ in R fällt. Wir haben zunächst nachzuweisen, daß diese Menge Ω_{N+1} meßbar ist; gleichzeitig werden wir

einen Ausdruck für ihren Inhalt $W_R^{(N+1)}(z_0)$ mit Hilfe der Funktion $W_R^{(N)}(z)$ angeben. Es sei $\bar{\eta}_{N+1}$ ein fester Wert im Intervalle $0 \leqq \eta_{N+1} < 1$ und $\Psi(\bar{\eta}_{N+1})$ die Punktmenge im N-dimensionalen Einheitswürfel $0 \leqq \eta_n < 1$ $(n = 1, 2, \ldots N)$, für die $S_{N+1}(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N, \bar{\eta}_{N+1})$ in R fällt. Wegen

$$S_{N+1}(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N, \bar{\eta}_{N+1}) = S_N(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N) + \log(1 - r_{N+1} e^{2\pi i \bar{\eta}_{N+1}})$$

besteht $\Psi(\bar{\eta}_{N+1})$ aus allen Punkten $(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N)$, für die $S_N(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N)$ dem aus dem gegebenen durch Verschiebung entstehenden Rechteck R mit dem Mittelpunkte $z_0 - \log(1 - r_{N+1} e^{2\pi i \bar{\eta}_{N+1}})$ angehört. Da nun die Behauptungen für N als richtig angenommen werden, so ist die Menge $\Psi(\bar{\eta}_{N+1})$ meßbar und besitzt den Inhalt $W_R^{(N)}(z_0 - \log(1 - r_{N+1} e^{2\pi i \bar{\eta}_{N+1}}))$; dies gilt für jedes $\bar{\eta}_{N+1}$. Wir können nun ohne Schwierigkeit zeigen, daß die Menge $\Omega_{N+1} = \Omega_{N+1}(z_0)$ meßbar ist, und daß ferner ihr Inhalt $W_R^{(N+1)}(z_0)$ mit dem Integrale

$$J = \int_0^1 W_R^{(N)}(z_0 - \log(1 - r_{N+1} e^{2\pi i \eta_{N+1}})) \, d\eta_{N+1}$$

übereinstimmt, wobei das Integral jedenfalls einen Sinn hat, da ja nach Annahme $W_R^{(N)}(z)$ eine stetige Funktion von z ist. Zum Beweise dieser Behauptung genügt es zu zeigen, daß, wenn A_e, A_i das äußere bzw. innere Maß von Ω_{N+1} bezeichnet, bei jedem $\varepsilon > 0$ die Ungleichungen

$$(12.) \qquad A_e < J + \varepsilon, \qquad A_i > J - \varepsilon$$

bestehen; denn wegen $A_e \geqq A_i$ folgt hieraus $A_e = A_i = J$.

Zum Nachweise der Richtigkeit von (12.) betrachten wir zwei mit R fest verbundene achsenparallele Rechtecke R_1 und R_2, die mit R den Mittelpunkt gemeinsam haben und von denen R_1 innerhalb R liegt, während R in R_2 gelegen ist. Nach IV können wir offenbar R_1 und R_2 so nahe an R wählen, daß bei jeder Lage des Mittelpunktes z

$$W_{R_1}^{(N)} > W_R^{(N)} - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad W_{R_2}^{(N)} < W_R^{(N)} + \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Nunmehr teilen wir das Integrationsintervall $0 \leqq \eta_{N+1} < 1$ so in kleine Teilintervalle der Länge δ, daß erstens

$$(13.) \qquad \left| J - \delta \cdot \sum_{(\delta)} W_R^{(N)}(z_0 - \log(1 - r_{N+1} e^{2\pi i \bar{\eta}_{N+1}})) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist, wobei die Summe etwa über die Anfangspunkte $\bar{\eta}_{N+1}$ der Teilintervalle zu erstrecken ist, und daß zweitens für jeden Punkt η_{N+1} eines der Teilintervalle $(\bar{\eta}_{N+1}, \bar{\eta}_{N+1} + \delta)$ das zugehörige Rechteck R mit dem Mittel-

punkte $z_0 - \log(1 - r_{N+1}e^{2\pi i\eta_{N+1}})$ einerseits ganz im Innern des zum Anfangspunkte $\bar{\eta}_{N+1}$ gehörigen Rechteckes R_2 verläuft, während es andererseits das ebenfalls zum Anfangspunkte $\bar{\eta}_{N+1}$ gehörige Rechteck R_1 ganz im Innern enthält. Das innere bzw. äußere Maß desjenigen Teiles von Ω_{N+1}, für den die Koordinate η_{N+1} dem Intervalle $(\bar{\eta}_{N+1}, \bar{\eta}_{N+1} + \delta)$ angehört, ist alsdann offenbar mindestens gleich $\delta W_{R_1}^{(N)}$ bzw. höchstens gleich $\delta W_{R_2}^{(N)}$, wo R_1 bzw. R_2 zum Anfangspunkte $\bar{\eta}_{N+1}$ gehören. Daher ist

$$A_i \geqq \delta \Sigma W_{R_1}^{(N)}, \qquad A_e \leqq \delta \Sigma W_{R_2}^{(N)},$$

wo diese Summen über die Anfangspunkte der Teilintervalle erstreckt sind. Wegen $W_{R_1}^{(N)} > W_R^{(N)} - \frac{\varepsilon}{2}$, $W_{R_2}^{(N)} < W_R^{(N)} + \frac{\varepsilon}{2}$ ergibt sich also

$$A_i \geqq \delta \Sigma W_R^{(N)} - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad A_e \leqq \delta \Sigma W_R^{(N)} + \frac{\varepsilon}{2}$$

und somit auf Grund von (13.)

$$A_i > J - \varepsilon, \qquad A_e < J + \varepsilon,$$

womit die Existenz von $W_R^{(N+1)}(z_0)$ und zu gleicher Zeit die Identität $W_R^{(N+1)}(z_0) = J$ bewiesen ist.

Aus dieser Identität folgt nunmehr unmittelbar II und IV; denn da $W_R^{(N)}(z)$ eine stetige Funktion von z ist, so gilt dies auch für das Integral

$$(14.) \qquad W_R^{(N+1)}(z) = \int_0^1 W_R^{(N)}(z - \log(1 - r_{N+1}e^{2\pi i\eta}))\, d\eta,$$

und es ist, wenn für alle z die Ungleichung $W_R^{(N)}(z) < \delta$ besteht, auch $W_R^{(N+1)}(z) < \delta$.

Schließlich folgt aus (14.) auch III, d. h. die Tatsache, daß $W_R^{(N+1)}$ dann und nur dann von Null verschieden ist, wenn im Innern von R ein Punkt von Σ_{N+1} liegt. Dies ergibt sich sofort aus der Richtigkeit von III für den Fall N; denn es ist erstens die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $R = R(z_0)$ einen Punkt $z = S_{N+1}(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \ldots \bar{\eta}_{N+1})$ im Innern enthält, die, daß im Innern eines der verschobenen Rechtecke R, deren Mittelpunkte auf dem Integrationswege $z_0 - \log(1 - r_{N+1}e^{2\pi i\eta})$ $(0 \leqq \eta < 1)$ liegen (nämlich desjenigen Rechteckes, dem $\eta = \bar{\eta}_{N+1}$ entspricht), ein Punkt von Σ_N enthalten ist (nämlich der Punkt $S_N(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \ldots \bar{\eta}_N)$); zweitens ist wegen der Stetigkeit des nirgends negativen Integranden von (14.) das Integral dann und nur dann Null, wenn auf dem ganzen Integrationswege $W_R^{(N)} = 0$ ist.

Wir beweisen nunmehr den folgenden Satz:

Hilfssatz III: *Es sei $r_1, r_2, \dots r_n, \dots$ eine solche unendliche Folge positiver Zahlen kleiner als* 1, *daß* $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ *divergiert,* $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2$ *jedoch konvergiert; es sei ferner* R_0 *ein festes achsenparalleles Rechteck in der* z*-Ebene mit dem Mittelpunkte* z_0. *Dann gibt es eine positive Zahl* $k = k(R_0, z_0)$, *so daß von einem gewissen* N *ab, d. h. für* $N > N_0$,

$$W_{R_0}^{(N)}(z_0) > k$$

ist, wobei die Wahrscheinlichkeit $W_{R_0}^{(N)}(z_0)$ *die oben festgesetzte Bedeutung hat.*

Beweis: Wie wir zunächst bemerken, folgt aus der vorausgesetzten Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$, daß das Gebiet Σ_N mit wachsendem N allmählich die ganze Ebene überdeckt, d. h. daß es zu einem beliebig gegebenen Kreis ein N_1 gibt, sodaß für $N > N_1$ der Kreis ganz im Innern von Σ_N verläuft*).

Unter $W_R^{(N,M)}(z)$, wo $M > N$ ist, verstehen wir die Wahrscheinlichkeit im obigen Sinne dafür, daß der Punkt

$$S_{N,M}(\eta_{N+1}, \eta_{N+2}, \dots \eta_M) = \sum_{n=N+1}^{M} \log(1 - r_n e^{2\pi i \eta_n})$$

dem achsenparallelen Rechtecke R mit dem Mittelpunkte z angehört, d. h. es ist $W_R^{(N,M)}(z)$ das Maß der Menge aller Punkte des $\eta_{N+1}, \dots \eta_M$-Raumes im Einheitswürfel $0 \leq \eta_n < 1$ $(n = N+1, \dots M)$, für die $S_{N,M}(\eta_{N+1}, \dots \eta_M)$ in R liegt. Die Existenz, Stetigkeit, sowie alle übrigen oben unter I, ... IV formulierten Eigenschaften dieser Funktion von z sind durch das Vorangehende bewiesen. Der erste Schritt beim Beweise des Hilfssatzes III besteht in dem Nachweise der Existenz einer von N und M unabhängigen, d. h. nur von der gegebenen Folge $r_1, r_2, \dots$ abhängigen, positiven Konstanten C mit folgender Eigenschaft: Bei jeder Einteilung der z-Ebene in kongruente achsenparallele Rechtecke R ist die Summe

$$W' = \Sigma' W_R^{(N,M)},$$

erstreckt über alle diejenigen Rechtecke R, die mindestens einen Punkt mit dem Kreise $|z| \leq C$ gemeinsam haben, größer als $\frac{1}{2}$. Wir betrachten hierzu das über den $(M-N)$-dimensionalen Einheitswürfel Q erstreckte Integral

---

*) Diese, übrigens leicht direkt einzusehende Tatsache, ist ganz speziell in den Resultaten der in der vorhergehenden Anmerkung zitierten Arbeit über die Addition konvexer Kurven enthalten.

$$J = \underset{(Q)}{\int\int\cdots\int} |S_{N,M}(\eta_{N+1}, \dots \eta_M)|^2 \, d\eta_{N+1} \cdots d\eta_M$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 |S_{N,M}(\eta_{N+1}, \dots \eta_M)|^2 \, d\eta_{N+1} \cdots d\eta_M.$$

Wegen

$$|S_{N,M}(\eta_{N+1}, \dots \eta_M)|^2 = \Big(\sum_{n=N+1}^{M} \log(1 - r_n e^{2\pi i \eta_n})\Big)\Big(\sum_{n=N+1}^{M} \log(1 - r_n e^{-2\pi i \eta_n})\Big)$$
$$= \Big(\sum_{n=N+1}^{M} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_n^m e^{2\pi i m \eta_n}}{m}\Big)\Big(\sum_{n=N+1}^{M} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_n^m e^{-2\pi i m \eta_n}}{m}\Big)$$

folgt in bekannter Weise*)

$$J = \sum_{n=N+1}^{M} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_n^{2m}}{m^2},$$

also

$$J < \sum_{n=N+1}^{M} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_n^2}{m^2} < \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 = C_1.$$

Es folgt nunmehr leicht, daß die Zahl $C = \sqrt{2C_1}$ die obige Eigenschaft besitzt. Denn es ist die nur endlich viele von Null verschiedene Glieder enthaltende Summe

$$W'' = \Sigma'' W_R^{(N,M)},$$

erstreckt über alle Rechtecke der Einteilung, die *keinen* Punkt mit dem Kreise $|z| \leq C = \sqrt{2C_1}$ gemeinsam haben, gleich dem Inhalte der Menge Ω'' aller der Punkte $(\eta_{N+1}, \dots \eta_M)$ im Einheitswürfel, für welche $S_{N,M}(\eta_{N+1}, \dots \eta_M)$ irgend einem dieser letzten Rechtecke angehört, da ja die Vereinigungsmenge einer endlichen Anzahl von meßbaren Mengen, von denen keine zwei einen gemeinsamen Punkt haben, selbst meßbar ist, und einen Inhalt gleich der Summe der Inhalte der vereinigten Mengen besitzt. Daher ergibt sich

$$C_1 > \underset{(Q)}{\int\int\cdots\int} |S_{N,M}(\eta_{N+1}, \dots \eta_M)|^2 d\eta_{N+1} \cdots d\eta_M$$
$$\geq \underset{(\Omega'')}{\int\int\cdots\int} |S_{N,M}(\eta_{N+1}, \dots \eta_M)|^2 d\eta_{N+1} \cdots d\eta_M \geq C^2 \underset{(\Omega'')}{\int\int\cdots\int} d\eta_{N+1} \cdots d\eta_M = C^2 W''.$$

Aus $C^2 W'' < C_1$ folgt nunmehr wegen $C^2 = 2C_1$, die Relation $W'' < \frac{1}{2}$. Nun ist aber $W' + W''$ gleich dem Inhalte des ganzen Einheitswürfels, d. h. gleich 1. Es ergibt sich also

$$W' > \tfrac{1}{2}, \qquad \text{q. e. d.}$$

Es ist nunmehr leicht, den Beweis des Hilfssatzes III zu Ende zu führen. Es sei $N_0 = N_0(R_0, z_0)$ so gewählt, daß das Gebiet Σ_{N_0} den Kreis

*) Vgl. z. B. Seite 462 der in der Anmerkung auf Seite 250 zitierten Abhandlung.

$|z| \leqq C + D$ im Innern enthält, wobei D der größte Abstand eines Randpunktes des gegebenen Rechteckes R_0 mit dem Mittelpunkte z_0 vom Nullpunkte ist, und C die eben eingeführte Konstante bedeutet; es sei ferner $N > N_0$. Dann betrachten wir außer der Ebene der komplexen Variabeln $z = S_N$ noch die Ebenen der komplexen Variabeln $x = S_{N_0}$ und $y = S_{N_0, N}$. In der z-Ebene liegt das gegebene Rechteck R_0. Wir teilen die x-Ebene und y-Ebene in ein Netz von gleichgroßen Quadraten der Seitenlänge δ ein, wo δ eine feste Zahl kleiner als der dritte Teil der kleineren Seite des Rechteckes R_0 ist. Dann ist klar, daß es zu jedem dieser Quadrate $\mathfrak{y}$ in der y-Ebene mindestens ein solches dieser Quadrate $\mathfrak{x}$ der x-Ebene gibt, daß, wenn y ein beliebiger Punkt in $\mathfrak{y}$,

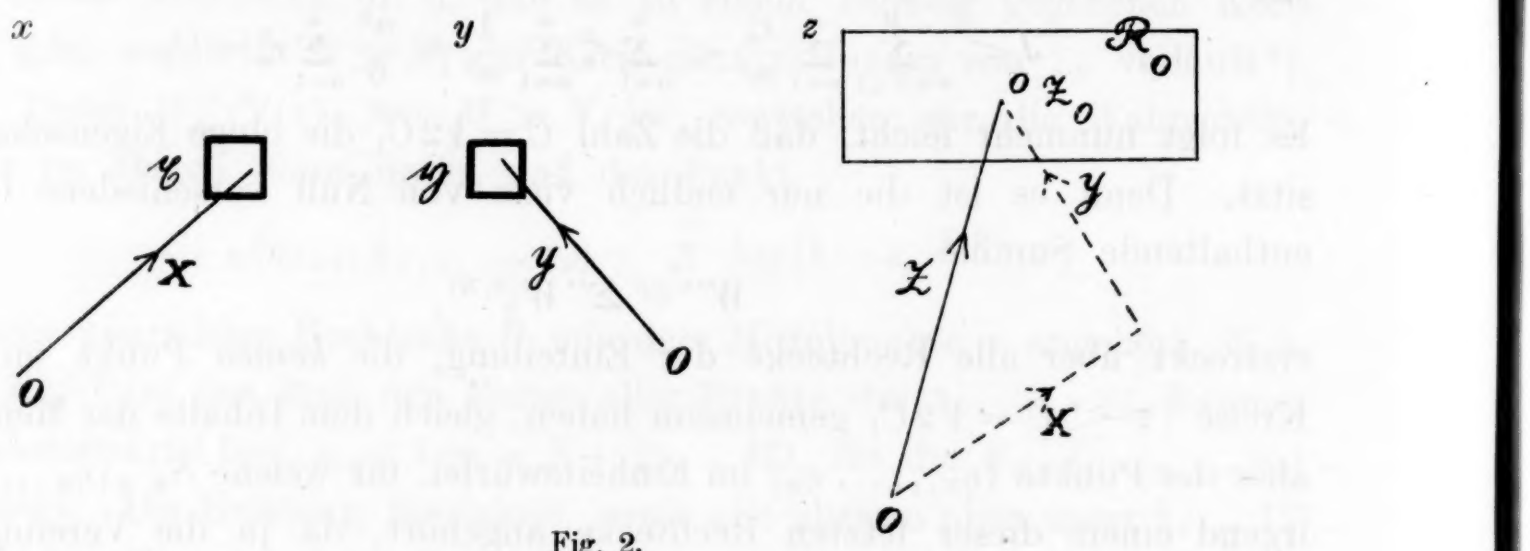

Fig. 2.

x ein beliebiger Punkt in $\mathfrak{x}$ ist, der Punkt $z = y + x$ in R_0 liegt; mit $\mathfrak{x}(\mathfrak{y})$ bezeichnen wir ein beliebig ausgewähltes unter diesen Quadraten.

Nun ist die Menge der Punkte $(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{N_0})$ im Einheitswürfel $0 \leqq \eta_n < 1$ $(n = 1, 2, \ldots N_0)$, für die $S_{N_0}(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{N_0})$ in einem der Quadrate $\mathfrak{x}$ liegt, meßbar und besitzt den Inhalt $W_{\mathfrak{x}}^{(N_0)}$; ebenso ist die Menge der Punkte $(\eta_{N_0+1}, \ldots \eta_N)$ im Einheitswürfel $0 \leqq \eta_n < 1$ $(n = N_0 + 1, \ldots N)$, für die $S_{N_0, N}(\eta_{N_0+1}, \ldots \eta_N)$ in einem der Quadrate $\mathfrak{y}$ liegt, meßbar und besitzt den Inhalt $W_{\mathfrak{y}}^{(N_0, N)}$; es ist daher die Menge der Punkte $(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N)$ im Einheitswürfel $0 \leqq \eta_n < 1$ $(n = 1, 2, \ldots N)$, für die gleichzeitig $S_{N_0}(\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{N_0})$ in $\mathfrak{x}$, $S_{N_0, N}(\eta_{N_0+1}, \ldots \eta_N)$ in $\mathfrak{y}$ liegt, meßbar und besitzt den Inhalt $W_{\mathfrak{x}}^{(N_0)} \cdot W_{\mathfrak{y}}^{(N_0, N)}$. Hieraus folgt unmittelbar, daß der Inhalt $W_{R_0}^{(N)}(z_0)$ der Menge der Punkte im N-dimensionalen Einheitswürfel $0 \leqq \eta_n < 1$ $(n = 1, 2, \ldots N)$, für die $S_N(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N)$ in R_0 liegt, größer oder gleich der Summe

$$\Sigma W_{\mathfrak{y}}^{(N_0, N)} \cdot W_{\mathfrak{x}(\mathfrak{y})}^{(N_0)}$$

ist, wobei die Summe über die sämtlichen Quadrate $\mathfrak{y}$ (und die entsprechenden $\mathfrak{x}(\mathfrak{y})$) zu erstrecken ist. Um so mehr gilt diese Ungleichheitsbeziehung, wenn die Summe nur über diejenigen Quadrate $\mathfrak{y}$ erstreckt wird, die mindestens einen Punkt mit dem Kreise $|\mathfrak{y}| \leqq C$ gemeinsam haben. Für ein solches $\mathfrak{y}$ liegt aber ersichtlich das entsprechende Quadrat $\mathfrak{x}$ innerhalb des festen Kreises $|x| \leqq C + D$, weil für jedes x in $\mathfrak{x}$ und y in $\mathfrak{y}$ der Punkt $z = x + y$ in R_0 liegt. Da nun jedes der endlich vielen, im Kreise $|x| \leqq C + D$ liegenden Rechtecke $\mathfrak{x}$ einen Punkt von Σ_{N_0} im Inneren enthält (sogar in Σ_{N_0} liegt), so ist nach III, Seite 265, jede der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $W_{\mathfrak{x}}^{(N_0)}$ positiv; daher gibt es eine (von N natürlich unabhängige) positive Konstante k, sodaß für alle diese $\mathfrak{x}$ die Ungleichung $W_{\mathfrak{x}}^{(N_0)} > 2k$ besteht. Aus der obigen Ungleichheitsbeziehung folgt also a fortiori, daß für alle $N > N_0$

$$W_{R_0}^{(N)}(z_0) > 2k \sum_{\mathfrak{y}} W_{\mathfrak{y}}^{(N_0, N)}$$

ist, wo die Summe über alle $\mathfrak{y}$ zu erstrecken ist, die mindestens einen Punkt mit dem Kreise $|\mathfrak{y}| \leqq C$ gemeinsam haben. Diese letzte Summe aber ist nach dem Obigen größer als $\frac{1}{2}$. Also ergibt sich schließlich für $N > N_0$

$$W_{R_0}^{(N)}(z_0) > k, \qquad \text{q. e. d.}$$

§ 4. Beweis des Hauptsatzes.

Hauptsatz: *Es sei σ_0 eine Zahl des Intervalles $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leqq 1$; dann liegen die Werte, die $\zeta(s)$ auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt, in der ganzen ζ-Ebene überall dicht; d. h. es gibt zu jedem beliebigen komplexen a und jedem positiven ε ein $t_0 = t_0(\sigma_0, a, \varepsilon)$, sodaß*

$$|\zeta(\sigma_0 + i t_0) - a| < \varepsilon$$

ist.

Beweis: Wir nehmen, was offenbar erlaubt ist, $a \neq 0$ und verstehen im folgenden unter $\log a$ einen beliebigen, fest gewählten Wert des Logarithmus von a. Es sei N eine positive ganze Zahl, über die wir nachher verfügen werden. Wir setzen, wie in § 1, $R_N(s) = \zeta(s) \prod_1^N (1 - p_n^{-s})$, d. h.

$$\zeta(s) = \prod_1^N (1 - p_n^{-s})^{-1} \cdot R_N(s);$$

sodann wählen wir ein positives $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon, a)$ so, daß aus den Ungleichungen

$$|x - a| < \varepsilon_1, \qquad |y - 1| < \varepsilon_1$$

die Ungleichung

$$|xy - a| < \varepsilon$$

folgt, und bestimmen danach $\varepsilon_2 > 0$ so, daß wenn für einen der Werte von $\log x$

$$|\log x - \log a| < \varepsilon_2$$

ist, hieraus

$$|x - a| < \varepsilon_1$$

folgt. Es ist daher der Satz bewiesen, wenn es gelingt, N und t_0 so zu bestimmen, daß die beiden Ungleichungen

$$(15.) \qquad \left| -\log \prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-\sigma_0 - it_0}) - \log a \right| < \varepsilon_2, \quad |R_N(\sigma_0 + it_0) - 1| < \varepsilon_1$$

gleichzeitig bestehen; hierbei wollen wir unter $\log \prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-\sigma_0 - it_0})$ die Summe der Hauptwerte der Logarithmen der Faktoren $(1 - p_n^{-\sigma_0 - it_0})$ verstehen. Führen wir zur Abkürzung die Bezeichnung

$$r_n = p_n^{-\sigma_0}, \quad \lambda_n = -\frac{\log p_n}{2\pi},$$

$$S_N(\sigma_0 + it) = \sum_{n=1}^{N} \log (1 - p_n^{-\sigma_0 - it}) = \sum_{n=1}^{N} \log (1 - r_n e^{2\pi i \cdot t\lambda_n})$$

ein, so nimmt die erste der beiden zu beweisenden Ungleichungen (15.) die Form

$$|S_N(\sigma_0 + it_0) + \log a| < \varepsilon_2$$

an.

Wir betrachten zugleich mit der Funktion $S_N(\sigma_0 + it)$ der einen reellen Variabeln t die Funktion der N unabhängigen Variabeln $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N$

$$(16.) \qquad S_N(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N) = \sum_{n=1}^{N} \log (1 - r_n e^{2\pi i \eta_n}).$$

Es sei R_0 ein festes, achsenparalleles Rechteck in der z-Ebene, das ganz im Kreise $|z + \log a| < \varepsilon_2$ liegt. Wegen $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leqq 1$, $r_n = p_n^{-\sigma_0}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ divergent, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2$ konvergent, ferner $0 < r_n < 1$ für alle n. Wir können daher auf die durch (16.) definierte Funktion $S_N(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N)$ den Hilfssatz III aus § 3 anwenden. Dieser lehrt die Existenz eines solchen positiven $k = k(R_0, r_1, r_2, r_3, \ldots) = k(a, \varepsilon, \sigma_0)$ und ganzzahligen $N_0 = N_0(a, \varepsilon, \sigma_0)$, daß für alle $N > N_0$ die Wahrscheinlichkeit $W_{R_0}^{(N)}$ dafür, daß der Zahlpunkt $S_N(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N)$ dem Rechtecke R_0 angehört, größer als k ist; hierbei bedeutet, wie wir erinnern wollen, die Wahrscheinlichkeit $W_{R_0}^{(N)}$ den Inhalt der meßbaren Menge Ω aller Punkte $(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N)$ im Einheitswürfel $0 \leqq \eta_n < 1$ $(n = 1, 2, \ldots N)$, für die $S_N(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N)$ in R_0 liegt.

Wir kehren nunmehr zur Funktion $S_N(\sigma_0 + it)$ zurück. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Punkt $z = S_N(\sigma_0 + it)$ dem Rechtecke R_0 angehört, ist, wie aus der Definition von Ω unmittelbar folgt, die, daß der Punkt $(t\lambda_1, t\lambda_2, \ldots t\lambda_N)$ im N-dimensionalen Raum nach Reduktion der Koordinaten modulo 1 zur Punktmenge Ω gehört.

Nun sind aber wegen des Satzes von der eindeutigen Zerlegbarkeit einer positiven ganzen Zahl in Primfaktoren die Zahlen $\lambda_n = -\frac{\log p_n}{2\pi}$ $(n = 1, 2, \ldots N)$ *linear unabhängig*, und wir können daher den Hilfssatz II über *Diophant*-ische Approximationen auf unsere Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_N$ und die Punktmenge Ω anwenden. Es bezeichne wie dort $M = M(T) = M^{(N)}(T)$ die Menge der Werte der Variabeln t zwischen 0 und T, für die der Punkt $(t\lambda_1, t\lambda_2, \ldots t\lambda_N)$ nach Reduktion der Koordinaten modulo 1 zu Ω gehört. Nun ist aber hier zu gleicher Zeit $M(T)$ die Menge der Werte der Variabeln t zwischen 0 und T, für die der Punkt $z = S_N(\sigma_0 + it)$ in R_0 fällt; daher besteht die Menge $M(T)$ aus einer endlichen Anzahl von Intervallen*), ist also meßbar und besitzt als Maß $\mathsf{M}(T) = \mathsf{M}^{(N)}(T)$ die Summe der Längen dieser Intervalle. Es strebt daher nach Hilfssatz II der Quotient $\frac{\mathsf{M}^{(N)}(T)}{T}$ gegen einen Grenzwert, der gleich dem Inhalte der meßbaren Punktmenge Ω ist; d. h. es gilt

$$\lim_{T=\infty} \frac{\mathsf{M}^{(N)}(T)}{T} = W_{R_0}^{(N)}.$$

Durch Verbindung dieses Resultates mit dem aus Hilfssatz III entnommenen Ergebnisse

$$W_{R_0}^{(N)} > k \qquad (\text{für } N > N_0)$$

erhalten wir also schließlich die Relation

$$\lim_{T=\infty} \frac{\mathsf{M}^{(N)}(T)}{T} > k \qquad (\text{für } N > N_0). \tag{17.}$$

Wir gehen nun zur Betrachtung des Restgliedes $R_N(\sigma_0 + it)$ über. Durch Anwendung des Hilfssatzes I aus § 1 auf $R_N(\sigma_0 + it)$ und die Zahlen $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\delta = \frac{k}{2}$ schließen wir auf die Existenz eines festen N, das wir größer als N_0 annehmen dürfen, mit folgender Eigenschaft: Die aus einer endlichen Anzahl von Intervallen bestehende Menge $m(T)$ aller Werte

*) Dies beweist man fast wörtlich wie die entsprechende Tatsache in Anmerkung *) auf Seite 255; übrigens ist die Tatsache, daß $M(T)$ meßbar ist, nicht wesentlich für die folgende Schlußweise; wir könnten ebenso mit dem inneren Maß $\mathsf{M}(T)$ operieren.

der Variabeln t zwischen $-T$ und T, für die $|R_N(\sigma_0 + it) - 1| \geqq \varepsilon_1$ ist, besitzt einen Inhalt $\mu(T)$, der für alle hinreichend großen T, d. h. für $T > T_0$ kleiner ist als $\frac{k}{2} T$. Dann ist gewiß auch der Inhalt $\mu^*(T)$ der Teilmenge $m^*(T)$ derjenigen Punkte von $m(T)$, für die $t > 0$ ist, kleiner als $\frac{k}{2} T$.

Wir wählen nunmehr eine solche Zahl $T > T_0$, daß

$$\frac{\mathsf{M}^{(N)}(T)}{T} > \frac{k}{2}$$

wird, was nach (17.) wegen $N > N_0$ gewiß möglich ist. Für die so bestimmten Werte von N und T gilt alsdann gleichzeitig

$$\mathsf{M}^{(N)}(T) > \frac{k}{2} T, \quad \mu^*(T) < \frac{k}{2} T.$$

Daher gibt es mindestens einen Wert t_0 zwischen 0 und T, der zur Menge $M^{(N)}(T)$ gehört, nicht aber zur Menge $m^*(T)$. Für diesen Wert t_0 folgt also

$$|S_N(\sigma_0 + it_0) + \log a| < \varepsilon_2, \quad |R_N(\sigma_0 + it_0) - 1| < \varepsilon_1,$$

mithin nach den über ε_1 und ε_2 getroffenen Festsetzungen

$$|\zeta(\sigma_0 + it_0) - a| < \varepsilon.$$

Damit ist der Beweis des Hauptsatzes vollendet.

Inhaltsverzeichnis.

		Seite
Einleitung		249
§ 1.	Abschätzung des Restgliedes	255
§ 2.	Hilfssätze aus der Theorie der *Diophant*ischen Approximationen	258
§ 3.	Über die Addition gewißer konvexer Kurven und zugehörige geometrische Wahrscheinlichkeiten	263
§ 4.	Beweis des Hauptsatzes (Bei jedem σ_0 des Intervalles $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leqq 1$ liegt die Menge der Werte von $\zeta(\sigma_0 + it)$ in der ζ-Ebene überall dicht)	271

Bedingungen für die Lösung des *Fermat*schen Problems $y^2 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$.

Von Herrn *E. Haentzschel* in Berlin.

Eine Reihe von Aufgaben der ebenen und körperlichen Geometrie führt dazu, die Beantwortung der Frage zu fordern, welche rationalen Zahlen genügen der Gleichung

$$\text{(I.)} \qquad y^2 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4,$$

wenn auch die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_4$ rational sind. Vornehmlich in dem Falle, daß entweder a_0 oder a_4 Quadratzahlen sind, haben sich *Fermat* (Briefwechsel mit *Jacques de Billy*, Bd. III seiner Werke, herausgegeben von *Henry* und *Tannery*, 1896), *Euler* (Anleitung zur Algebra, 2. Teil, 2. Abschnitt, Kap. 8 und 9), *Kummer* (dieses Journ. Bd. 37), *Schwering* (dieses Journ. Bd. 115) und viele andere Mathematiker mit dem Problem beschäftigt. Über *Euler*s „methodus nova et facilis formulas cubicas et biquadraticas ad quadratum reducendi“ (Commentat. arithm. collectae, Bd. II. Petersburg 1849) urteilt *P. Bachmann* in seiner „Additiven Zahlentheorie“ (2. Bd. S. 449. Teubner 1910) so: „Wenngleich nun diese Methoden ausreichen, um aus *einer* Lösung der Aufgabe noch *andere* zu finden, so leuchtet doch ein, daß damit die Aufgabe bei weitem nicht erledigt ist. Hierzu fehlt es einerseits an dem Nachweise, wie jederzeit *eine* Lösung gefunden werden könne, andererseits an einer Methode, um aus dieser oder anderen *fundamentalen* Lösungen sämtliche übrigen zu erhalten, und bis zur Zeit sind diese Teile der Aufgabe noch völlig ungelöst geblieben.“

Vielleicht sind die folgenden Zeilen geeignet, einiges zur Aufhellung der Schwierigkeiten beizutragen, die sich der Lösung des Problems, auch in seinem allgemeinsten Falle entgegenstellen.

Wir müssen drei Fälle unterscheiden.

§ 1. *Erster Fall.*

Der auf der rechten Seite von (I.) stehende biquadratische Ausdruck möge gleich Null gesetzt eine Gleichung mit den *Wurzeln* x_0, x_1, x_2, x_3 ergeben, *von denen mindestens eine*, nämlich x_0, *rational ist.* Wir setzen

(1.) $$f(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = a_0 (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3);$$

(2.) $$g_2 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2;$$

(3.) $$g_3 = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3;$$

(4.) $$c_1 = \frac{\frac{1}{4}f'(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{1}{24}f''(x_0), \quad e_2 = \frac{\frac{1}{4}f'(x_0)}{x_2 - x_0} + \frac{1}{24}f''(x_0), \quad e_3 = \frac{\frac{1}{4}f'(x_0)}{x_3 - x_0} + \frac{1}{24}f''(x_0).$$

Es ist

(5.) $$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad \frac{g_2}{4} = e_1^2 - e_2 e_3 = e_2^2 - e_3 e_1 = e_3^2 - e_1 e_2, \quad \frac{g_3}{4} = e_1 e_2 e_3.$$

Wir machen in (I.) die Substitution

(A_1.) $$x = x_0 + \frac{\frac{1}{4}f'(x_0)}{s - \frac{1}{24}f''(x_0)};$$

sie ist aus der *Weierstraß*schen Behandlung des elliptischen Integrals erster Gattung, um es auf die *Weierstraß*sche Normalform eines solchen zu bringen, genügend bekannt.

Alsdann geht hervor:

(B_1.) $$y = \pm \frac{\frac{1}{4}f'(x_0) \cdot v}{[s - \frac{1}{24}f''(x_0)]^2}, \quad \text{wo}$$

(II.) $$v^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3.$$

Die vorgelegte Aufgabe (I.) ist jetzt auf die einfachere (II.) zurückgeführt, rationale Zahlen s anzugeben, denen vermöge von (II.) rationale Zahlen v entsprechen.

Wir schreiben

(II.) $$v^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3 = 4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3).$$

Euler hat sich in seiner „Anleitung zur Algebra“ (2. Teil, 2. Abschnitt, Kap. 14, Nr. 223—230) die Aufgabe gestellt: „Zu drei gegebenen Zahlen: $-e_1, -e_2, -e_3$ eine solche Zahl s zu finden, die zu jeder derselben addiert, ein Quadrat hervorbringt.“ Es müssen demnach $(s - e_1)$, weiter $(s - e_2)$,

endlich $(s - e_3)$ Quadrate sein; folglich ist auch ihr Produkt ein Quadrat. Wird dies mit $\frac{v^2}{4}$ bezeichnet, so erhalten wir Gleichung (II.). Identifizieren wir s mit der *Weierstraß*schen Funktion $\wp(u)$, so hat *Euler* sich die Aufgabe gestellt, solche Größen $\wp(u)$ zu ermitteln, für welche die zugehörige Funktion $v = \frac{d\wp(u)}{du} = \wp'(u)$ ebenfalls rational ist.

Euler setzt, um das Problem zu lösen,

$$(6.) \qquad s - e_1 = \frac{p^2}{q^2}, \quad e_1 - e_2 = az, \quad e_1 - e_3 = bz,$$

alsdann ist

$$(7.) \quad s - e_2 = \frac{p^2}{q^2} + az = \frac{p^2 + azq^2}{q^2}, \quad s - e_3 = \frac{p^2}{q^2} + bz = \frac{p^2 + bzq^2}{q^2}.$$

Nun formuliert *Euler* die Aufgabe in Nr. 225 so: „Wenn a und b gegebene Zahlen sind, die Zahl z zu finden, so daß sich die beiden Formeln $p^2 + azq^2$ und $p^2 + bzq^2$ zu Quadraten machen lassen, und zugleich die kleinsten Werte für p und q zu bestimmen."

Ohne an dieser Aufgabe etwas zu ändern, können wir die Ausgangsgleichung (II.) auch so schreiben:

$$(II^a.) \qquad v^2 = 4(s - e_1 z)(s - e_2 z)(s - e_3 z);$$

weiter

$$(6^a.) \qquad s - e_1 z = \frac{p^2}{q^2}, \quad e_1 z - e_2 z = az, \quad e_1 z - e_3 z = bz,$$

$$(7^a.) \quad s - e_2 z = (p^2 + azq^2) : q^2; \quad (s - e_3 z) = (p^2 + bzq^2) : q^2.$$

Offenbar haben wir die ursprüngliche Forderung weiter gefaßt. Es ist nicht nötig, daß die drei Zahlen e_1, e_2, e_3 selbst gegeben sind; es braucht nur ihr Verhältnis bekannt zu sein. Den Proportionalitätsfaktor z findet *Euler* nach einer längeren Entwickelung:

$$z = \frac{4wy(w + ay)(w + by)}{q^2} \qquad \text{oder}$$

$$(8.) \qquad q^2 z = 4wy(w + ay)(w + by),$$

„wo die Zahlen w und y nach Belieben genommen werden können, und alsdann findet man zuerst q^2, indem dafür das größte Quadrat genommen wird, das in der rechten Seite enthalten ist, woraus sich dann z ergibt".

Weiter zeigt *Euler*, daß

$$(9.)\quad \begin{cases} p^2+azq^2=(w^2+2awy+aby^2)^2,\ p^2+bzq^2=(w^2+2bwy+aby^2)^2, \\ p=w^2-aby^2,\ s=\dfrac{p^2}{q^2}+e_1z, \\ v^2=\dfrac{4(w^2-aby^2)^2\cdot(w^2+2awy+aby^2)^2\cdot(w^2+2bwy+aby^2)^2}{q^6} \end{cases}$$

ist.

Da die Gleichung (1.) *eine rationale Wurzel* haben sollte, so ist sie durch Quadratwurzeln auflösbar. Dies ist jedoch nur dann der Fall, wenn ihre Resolvente *eine rationale Wurzel* hat (vgl. Enzyklopädie der Math. Wissenschaften, Bd. I, 1. Teil, S. 517, 1898—1904). Diese Resolvente ist

$$(10.)\qquad 4s^3-g_2s-g_3=4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)=0.$$

Demnach muß *mindestens* e_1 *rational* sein. *Euler* hat offenbar bei den Zahlen e_1, e_2, e_3 nur an *rationale* Zahlen gedacht; die Kapitel 226—230 mit ihren Beispielen sind ein Beweis dafür.

Für diesen Fall habe ich die glückliche Verquickung der besprochenen *Euler*schen Aufgabe mit der *Weierstraß*schen Theorie der elliptischen Funktionen an einem Beispiel gezeigt, das ich unter dem Titel: *Rationale Tetraeder mit kongruenten Seiten*" in den Sitzungsberichten der Berliner Mathem. Gesellschaft, 12. Jahrgang, 1913, veröffentlicht habe.

Durch passende Wahl von w und y findet man q^2, indem zugleich die Forderung $z=1$ gestellt wird. Jetzt erhält man p und hierauf s. Dieses s wird mit $\wp(2u)$ identifiziert und hieraus durch Auflösen der Gleichung 4. Grades

$$(11.)\qquad s=\frac{\left(x^2+\frac{g_2}{4}\right)^2+2g_3x}{4x^3-g_2x-g_3}.$$

(vgl. *Haentzschel*, Über eine von *Hermite* herrührende Substitution usw., dieses Journ. Bd. 135, S. 79—80; 1908)

$$x_1=\wp u;\ x_2=\wp(u+\omega');\ x_3=\wp(u+\omega);\ x_4=\wp(u+\omega+\omega')$$

hergeleitet. Diese Werte haben auch die Eigenschaft, in (II.) eingesetzt diese Gleichung zu erfüllen, ohne daß $(x_\lambda-e_1)$ bzw. $(x_\lambda-e_2)$ bzw. $(x_\lambda-e_3)$ jedes einzeln für sich Quadrate sind; gerade solche werden aber in (II.) verlangt. Es mögen

$$(12.)\qquad s=\wp u_1,\ s=e_1=\wp(\omega),\ s=e_3=\wp(\omega')$$

primitive oder *grundlegende* Lösungen im Sinne *Fermat*s sein, d. h. Lösungen

in möglichst kleinen Zahlen, so kann man aus ihnen mit Hilfe des Additionstheorems $\wp(u \pm v)$ der Funktion $\wp(u)$ die folgenden *vier unendlichlangen Fermatschen Ketten* von Lösungen der Gleichung (II.) herleiten:

$$(13.)\quad \begin{cases} \wp u_1,\ \wp 2u_1,\ \wp 3u_1,\ \wp 4u_1,\ \wp 5u_1, \ldots; \\ \wp(u_1+\omega),\ \wp(2u_1+\omega),\ \wp(3u_1+\omega),\ \wp(4u_1+\omega),\ \wp(5u_1+\omega), \ldots; \\ \wp(u_1+\omega'),\ \wp(2u_1+\omega'),\ \wp(3u_1+\omega'), \ldots; \\ \wp(u_1+\omega+\omega'),\ \wp(2u_1+\omega+\omega'),\ \wp(3u_1+\omega+\omega'), \ldots . \end{cases}$$

Zu jedem Werte gehört das zugehörige v. Sie müssen in (A_1.) und (B_1.) eingesetzt werden, um das gesuchte rationale Zahlenpaar (x, y) zu erhalten.

Gesetzt, es gäbe noch eine vierte primitive Lösung:

$$(14.)\qquad s = \wp(u_2),$$

so knüpfen sich an sie *vier weitere unendlichlange Fermatsche Ketten:*

$$(15.)\quad \begin{cases} \wp u_2,\ \wp 2u_2,\ \wp 3u_2,\ \ldots;\ \wp(u_2+\omega),\ \ldots; \\ \wp(u_2+\omega'),\ \ldots;\ \wp(u_2+\omega+\omega'),\ \ldots . \end{cases}$$

Durch fernere Anwendung des Additionstheorems $\wp(u \pm v)$ kann man jetzt unendlich viele neue *Fermat*sche Ketten entwickeln:

$$(16.)\quad \begin{cases} \wp(u_1 \pm u_2),\ \wp(u_1 \pm 2u_2),\ \wp(u_1 \pm 3u_2), \ldots;\ \wp(u_1 \pm u_2+\omega),\ \wp(u_1 \pm 2u_2+\omega), \ldots; \\ \wp(2u_1 \pm u_2),\ \wp(2u_1 \pm 2u_2),\ \wp(2u_1 \pm 3u_2), \ldots;\ \wp(2u_1 \pm u_2+\omega),\ \wp(2u_1 \pm 2u_2+\omega), \ldots; \\ \wp(3u_1 \pm u_2),\ \wp(3u_1 \pm 2u_2),\ \wp(3u_1 \pm 3u_2), \ldots; \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \wp(u_1 \pm u_2+\omega'),\ \wp(u_1 \pm 2u_2+\omega'), \ldots;\ \wp(u_1 \pm u_2+\omega+\omega'),\ \wp(u_1 \pm 2u_2+\omega+\omega'), \ldots; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die Zahl der Lösungen (x, y) von (I.) wächst demnach ins Unbegrenzte. In der Studie „*Rationale Tetraeder mit kongruenten Seiten*“ habe ich einen solchen Fall gegeben.

Für sehr viele Fälle trifft das hier aus der Theorie entwickelte Bild zu. Aber es gibt auch Beispiele, bei denen es nur gelingt, die drei in (12.) gegebenen primitiven Lösungen zu ermitteln; dann verbleibt es bei den vier in (13.) gegebenen Ketten. Endlich können diese vier Ketten auf wenige Glieder zusammenschrumpfen, d. h. man ist auf wenige Lösungen beschränkt. Ein solches Beispiel ist das folgende. Eine vorgelegte Gleichung (I.) gebe durch die Substitution (A_1.) die Gleichung (II.):

$$(17.)\quad v^2 = 4s^3 - \frac{51361}{12}s + \frac{6826609}{216} = 4\left(s - \frac{94}{12}\right)\left(s - \frac{337}{12}\right)\left(s + \frac{431}{12}\right).$$

Wir nehmen

$$e_1 = \frac{337}{12},\ e_2 = \frac{94}{12},\ e_3 = -\frac{431}{12},\ \text{so ist}\ a = e_1 - e_2 = \frac{81}{4};\ b = e_1 - e_3 = 64.$$

Demnach ist

$$q^2 z = 4wy\left(w + \frac{81}{4}y\right)(w + 64y).$$

Wir setzen

$$w = 144,\ y = 4 \quad \text{und erhalten}$$

$$z = 1;\ q^2 = 120^4;\ p = 12^4 - \frac{81}{4} \cdot 64 \cdot 4^2 = 0; \quad s = \frac{p^2}{q^2} + e_1 = e_1 = \frac{337}{12},$$

daher $v = 0$.

In dem System (12.) der primitiven Lösungen fallen demnach hier zwei derselben zusammen. Setzen wir jetzt an auf Grund der Formel (11.):

$$\frac{337}{12} = \frac{\left(x^2 + \frac{51361}{48}\right)^2 - \frac{6826609}{108}x}{4x^3 - \frac{51361}{12}x + \frac{6826609}{216}},$$

so hat diese Gleichung die Doppelwurzeln

$$x_1 = x_4 = \frac{769}{12};\ x_2 = x_3 = -\frac{95}{12}.$$

Und in der Tat ist

$$v^2 = 4\left(\frac{769}{12} - \frac{94}{12}\right)\left(\frac{769}{12} - \frac{337}{12}\right)\left(\frac{769}{12} + \frac{431}{12}\right) = 4 \cdot \frac{225}{4} \cdot \frac{144}{4} \cdot 100 = 900^2.$$

Weiter ist

$$v^2 = 4\left(-\frac{95}{12} - \frac{94}{12}\right)\left(-\frac{95}{12} - \frac{337}{12}\right)\left(-\frac{95}{12} + \frac{431}{12}\right) = 252^2.$$

Da in $v^2 = 900^2$ jeder Faktor ein Quadrat ist, so kann man noch einen Schritt rückwärts tun und ansetzen:

$$\frac{769}{12} = \frac{\left(x^2 + \frac{51361}{48}\right)^2 - \frac{6826609}{108}x}{4x^3 - \frac{51361}{12}x + \frac{6826609}{216}}.$$

Diese Gleichung hat die Wurzeln

$$x = \frac{769}{12} \pm \frac{15}{2} \cdot 6 \pm 6 \cdot 10 \pm 10 \cdot \frac{15}{2};$$

$$x_1 = \frac{2929}{12} = \wp u_1,\ x_2 = -\frac{311}{12} = \wp(u_1 + \omega'),\ x_3 = \frac{49}{12} = \wp(u_1 + \omega),$$

$$x_4 = \frac{409}{12} = \wp(u_1 + \omega + \omega').$$

Hieraus folgt nun $\wp(2u_1) = \frac{769}{12}$ und $\wp(4u_1) = \frac{337}{12} = \wp(\omega) = e_1$. Daher ist

$$4u_1 = \omega;\ u_1 = \frac{\omega}{4}.$$

Man kann also die folgende Tabelle aufstellen:

$$(18.)\quad \begin{cases} \wp\left(\frac{\omega}{4}\right)=\frac{2929}{12};\ \wp\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{769}{12};\ \wp\left(\frac{3}{4}\omega\right)=\frac{49}{12};\ \wp(\omega)=\frac{337}{12}; \\ \wp\left(\frac{\omega}{4}+\omega'\right)=-\frac{311}{12};\ \wp\left(\frac{\omega}{2}+\omega'\right)=-\frac{95}{12};\ \wp\left(\frac{3}{4}\omega+\omega'\right)=\frac{409}{12};\ \wp(\omega+\omega')=\frac{94}{12}; \\ \wp\left(\frac{5}{4}\omega\right)=\frac{49}{12};\ \wp\left(\frac{3}{2}\omega\right)=\frac{769}{12};\ \wp\left(\frac{7}{4}\omega\right)=\frac{2929}{12};\ \wp(2\omega)=\infty; \\ \wp\left(\frac{5}{4}\omega+\omega'\right)=\frac{409}{12};\ \wp\left(\frac{3}{2}\omega+\omega'\right)=-\frac{95}{12};\ \wp\left(\frac{7}{4}\omega+\omega'\right)=-\frac{311}{12};\ \wp(\omega')=-\frac{431}{12}. \end{cases}$$

Neue Zahlenwerte erscheinen nicht mehr; es ist demnach zwecklos, die Tabelle fortzusetzen. Ob (17.) ncch eine dritte primitive Lösung hat, ist eine offene Frage.

Zum Schluß müssen wir noch des Falles Erwähnung tun, der ebenfalls durch die *Euler*sche Methode bemeistert werden kann, wenn nämlich nur e_1 reell, hingegen e_2 und e_3 konjugiert-komplex sind. Ein Beispiel hierfür habe ich in der Studie: „*Euler* und die *Weierstraß*sche Theorie der elliptischen Funktionen“ gegeben (Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinig. 22, 1913.); ich habe dort gezeigt, wie man aus drei primitiven reellen Lösungen unendlich viele neue Lösungen herleiten kann, die sich ebenfalls als *Fermat*sche Ketten anordnen lassen.

§ 2. *Zweiter Fall.*

In Gleichung (I.) sei *der Koeffizient a_0 eine Quadratzahl.* Sollte a_4 eine solche Zahl sein, so ersetze man x in (I.) durch $\frac{1}{u}$, so wird wieder der Koeffizient der höchsten Potenz diese Eigenschaft haben.

Man bilde auf Grund der Formeln (2.) und (3.) des § 1 g_2 und g_3; hierauf versuche man die Gleichung (II.) zu lösen, so wie es in § 1 geschildert worden ist. Jetzt kann aber zu den beiden besprochenen Fällen ein neuer Fall hinzutreten, wenn nämlich keine der Größen e_λ rational ist. Dann muß man eine primitive Lösung zu erraten suchen. Mehrere hierher gehörige, von *Fermat* in seinem Briefwechsel mit *Jacques de Billy* behandelte Beispiele habe ich nach dieser neuen *Euler-Weierstraß*schen Methode mit Erfolg bearbeitet; ihre Veröffentlichung soll an anderer Stelle geschehen. Gesetzt, man ist in den Besitz von sehr vielen Wertepaaren $(s, \pm v)$ gelangt, die der Gleichung (II.) genügen, so geben die von *Weierstraß* aufgestellten Formeln:

$$(A_2.)\qquad x=\frac{\pm\sqrt{a_0}\cdot v+2a_1s+a_0a_3-a_1a_2}{2(a_1^2-a_0a_2)-2a_0s},$$

$$(B_2.) \qquad \pm\sqrt{a_0}\cdot y = 2s - (a_0x^2 + 2a_1x + a_2),$$

die Lösung der gestellten Aufgabe (I.). Im besondern ist

$$s = \frac{a_1^2 - a_0a_2}{a_0} \text{ und } s = \frac{a_3^2 - a_4a_2}{a_4}.$$

§ 3. *Dritter Fall.*

a_0 bzw. a_4 seien beliebige Zahlen; von den in § 1 genannten Wurzeln sei keine einzige eine rationale Zahl.

Man bilde g_2 und g_3 und versuche die Gleichung (II.) zu lösen. Diese Aufgabe muß zuerst erledigt werden; sie erscheint als *die erste Bedingung* für die Lösung der Aufgabe (I.).

Nunmehr geben die beiden *Weierstraß*schen Formeln:

$$(A_3.) \qquad x = x_0 + \frac{\pm y_0 v + \frac{1}{2}f'(x_0)(s - \frac{1}{24}f''(x_0)) + \frac{1}{24}f(x_0)f'''(x_0)}{2(s - \frac{1}{24}f''(x_0))^2 - \frac{1}{48}f(x_0)f^{(4)}(x_0)},$$

$$(B_3.) \quad \pm y_0\cdot y = 2s(x-x_0)^2 - f(x_0) - \tfrac{1}{2}f'(x_0)(x-x_0) - \tfrac{1}{12}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

die vollständige Lösung der Aufgabe (I.). Sie setzen als *zweite Bedingung* voraus, daß es gelingt, auf irgend einem Wege in den Besitz einer *Anfangslösung* $(x_0, \pm y_0)$ zu gelangen. Diese *Weierstraß*schen Formeln sind bekanntlich zu einem ganz anderen Zwecke hergeleitet worden (vgl. *Haentzschel*, Über die Reduktion des elliptischen Integrals erster Gattung auf die *Weierstraß*sche Normalform mit Hilfe einer *Hermite*schen Substitution. Archiv d. Mathem. (3.) 1, S. 118—123, 1901), sie geben uns daher keine Begründung für die *Notwendigkeit* der ersten und zweiten Bedingung. Diese wird vielmehr durch den folgenden Gedankengang vermittelt, der zugleich den Weg genau angibt, auf dem man zu einer *Anfangslösung* gelangen kann.

Wir nehmen mit Gleichung (1.) die *Tschirnhausen-Transformation* vor:

$$(19.) \qquad x = \frac{x_0t - (a_1x_0^3 + 3a_2x_0^2 + 3a_3x_0 + a_4)}{t + (a_0x_0^3 + 3a_1x_0^2 + 3a_2x_0 + a_3)},$$

wobei wir unter t eine neue Variable, unter x_0 eine noch näher zu bestimmende rationale Zahl verstehen. Die Kovariante 4. Grades der biquadratischen Form

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$$

wollen wir mit $C_{4,4}(x)$, diejenige 6. Grades mit $C_{4,6}(x)$ bezeichnen. Das Resultat der in (19.) angegebenen Substitution ist:

$$(20.) \qquad y^2 = \frac{y_0^2\{t^4 + 6C_{4,4}(x_0)t^2 + 4C_{4,6}(x_0)t + (g_2y_0^4 - 3C_{4,4}^2(x_0))\}}{[t + (a_0x_0^3 + 3a_1x_0^2 + 3a_2x_0 + a_3)]^4}.$$

Ist daher $(x_0, \pm y_0)$ eine Lösung der Gleichung (I.), eine sog. *Anfangslösung*, so zeigt (20.), wie wir den vorliegenden *dritten* Fall auf den *zweiten* zurückführen können, da es sich bloß noch um die Lösung der Aufgabe

$$\bar{y}^2 = t^4 + 6C_{4,4}(x_0)t^2 + 4C_{4,6}(x_0)t + (g_2 y_0^4 - 3C_{4,4}^2(x_0)) \tag{21.}$$

handelt, die als erledigt angesehen werden darf.

Alles hängt demnach davon ab, die Zahl x_0 zu erhalten. Nach *Cayley* genügen die Koeffizienten der rechten Seite von (21.) der Gleichung:

$$\begin{aligned} C_{4,6}^2(x_0) &= -4C_{4,4}^3(x_0) + g_2 C_{4,4}(x_0) f^2(x_0) - g_3 f^3(x_0), \\ &= -4(C_{4,4}(x_0) + e_1 f(x_0))(C_{4,4}(x_0) + e_2 f(x_0))(C_{4,4}(x_0) + e_3 f(x_0)). \end{aligned} \tag{22.}$$

Sei s eine Lösung von (II.), so setze man

$$s = -\frac{C_{4,4}(x_0)}{f(x_0)}, \tag{23.}$$

in welcher Gleichung x_0 die einzige Unbekannte ist. Über ihre Auflösung haben wir in diesem Journal, Bd. 135, S. 75—80, das Notwendige beigebracht. (Über eine von *Hermite* herrührende Substitution usw.) Man hat also in (23.) so lange die vorher charakterisierten Zahlen s einzuführen und die jedesmal entstehende Gleichung 4. Grades zu lösen, bis es gelingt, eine Gleichung zu erhalten, die wenigstens *eine rationale Wurzel* $\bar{x}_0$ besitzt. In einigen von mir durchgerechneten Fällen gestaltete sich das Ergebnis so, daß man von der Gleichung 4. Grades (23.) den Faktor $(x_0 - \bar{x}_0)$ abspalten konnte, daß dann aber eine Gleichung 3. Grades übrig blieb, die keine weitere rationale Wurzel besaß. Führen wir jetzt (23.) in (22.) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} C_{4,6}^2(x_0) &= 4f^3(x_0)(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3) \\ &= f^3(x_0) \cdot v^2 \end{aligned}$$

oder

$$f^3(x_0) = \frac{C_{4,6}^2(x_0)}{v^2}. \tag{24.}$$

Ist demnach (II.) gelöst, so ist die rechte Seite von (24.) ein *Quadrat*, was nur möglich ist, wenn auch $f(x_0)$ ein *Quadrat ist.* Demnach ist $y_0 = \pm \sqrt{f(x_0)}$ eine rationale Zahl, und die *Anfangslösung* $(x_0, \pm y_0)$ ist gefunden. Die Lösung des *Fermat*schen Problems (II.) und der Gleichung (23.), die eine rationale Wurzel haben muß, sind demnach *notwendige* Bedingungen für die Lösung des durch (I.) dargestellten *Fermat*schen Problems in seinem *allgemeinsten* Falle.

Über Differentialungleichungen.

Von Herrn *P. Bohl* in Riga.

Die Untersuchungen der theoretischen Mechanik stützen sich auf gewisse durch Erfahrung, Überlegung und Vermutung gewonnene Aussagen, die jedoch nicht Anspruch auf Genauigkeit erheben, sondern einen Näherungscharakter tragen. Einerseits ergibt sich demgemäß die Aufgabe, auf Grund der vorliegenden Daten den betrachteten Bewegungsvorgang zu untersuchen, andererseits ist die Beurteilung derjenigen Abweichungen unerläßlich, welche in den gewonnenen Resultaten infolge der erwähnten Ungenauigkeit zu erwarten sind. Die zuerst genannte Aufgabe wird in der Regel*) mit der Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen in Verbindung gebracht. Diese Lösung geschieht nur ausnahmsweise durch Integration „in endlicher Form". Meist ist man auf Näherungsverfahren angewiesen, von denen wir die „Methode der sukzessiven Approximationen" besonders erwähnen. Was die an zweiter Stelle genannte Aufgabe betrifft, so wird man häufig, obgleich keineswegs immer, geneigt sein, dem Näherungscharakter der vorliegenden Daten dadurch Rechnung zu tragen, daß man die Differentialgleichungen durch Summanden ergänzt, welche *nur* der Bedingung unterworfen sind, absolut nicht größer als gewisse Konstanten zu werden. In diesem Falle ist es natürlich, nicht von Differentialgleichungen, sondern von *Differentialungleichungen* zu reden**).

*) Wir haben hier nicht die Mechanik der deformierbaren Körper im Auge.

**) Es würde natürlich naheliegen, die *Stabilitätsverhältnisse* als den Gegenstand der im folgenden mitgeteilten Untersuchungen zu bezeichnen. Ich konnte mich jedoch nicht entschließen, eine entsprechende neue Definition der Stabilität einzuführen, da die vorhandenen Definitionen wohl schon zu verschiedenartig sind.

Beschränkt man sich auf ein von vornherein gegebenes *endliches* Zeitintervall, so besitzt die Analysis bereits Methoden, um die genannten Fragen in Fällen von beträchtlicher Allgemeinheit zu untersuchen. Es ist aber von Interesse, Klassen von Differentialungleichungen resp. Differentialgleichungen zu finden, bei welchen die erwähnte Beschränkung vermieden werden kann, so daß auch zeitlich wenigstens einseitig unbegrenzte Bewegungsformen der Betrachtung unterliegen.

Wir gehen von folgenden Differential*ungleichungen* aus

$$(\alpha.) \qquad \left| \frac{d^{\mu_i} x_i}{dt^{\mu_i}} - X_i \right| \overline{\overline{<}} \varepsilon. \qquad (i=1,2,\dots n)$$

Hierbei ist ε eine Konstante, die X_i sind Funktionen von $x_m, x'_m, \dots x_m^{\mu_m - 1}$ $(m = 1, 2, \dots n)$ und t. Die Angaben bezüglich der Gebiete, für welche die X_i definiert sind, bezüglich der Stetigkeitseigenschaften, der Existenz von Differentialquotienten usw. unterdrücken wir hier, wo es sich nur um eine vorläufige Orientierung über die Resultate handelt. Wir verweisen in dieser Beziehung auf das Folgende.

Außerdem sollen die Differential*gleichungen*

$$(\beta.) \qquad \frac{d^{\mu_i} x_i}{dt^{\mu_i}} - X_i = 0 \qquad (i=1,2,\dots n)$$

gebildet werden.

Es mögen nun für ein gewisses mit irgendeinem t-Wert *beginnendes* zusammenhängendes t-Intervall T eine Lösung von $(\alpha.)$ und eine Lösung von $(\beta.)$ vorliegen, wobei die $x_m, x'_m, \dots x_m^{\mu_m - 1}$ $(m = 1, 2, \dots n)$ der beiden Lösungen für den Anfangswert zusammenfallen. Im übrigen sollen diese Größen für die Lösung von α mit $\bar{\bar{x}}_m, \bar{\bar{x}}'_m$ usw., für die Lösung von $(\beta.)$ mit $\bar{x}_m, \bar{x}'_m$ usw. bezeichnet werden.

Es gibt nun Klassen von Differentialgleichungen der oben genannten Art, bei welchen unter den eben erwähnten Annahmen im ganzen Intervall T

$$(\gamma.) \qquad |\bar{\bar{x}}_m - \bar{x}_m| \overline{\overline{<}} k \cdot \varepsilon \qquad (m=1,2,\dots n)$$

gilt, falls $\varepsilon \overline{\overline{<}} e$ ist. Hierbei bedeuten $e > 0$ und k den Differentialgleichungen $(\beta.)$ zugeordnete Größen).*

Das wesentlichste Ergebnis dieser Arbeit besteht nun in folgendem Theorem: *Damit das eben genannte Verhalten eintrete, ist notwendig und*

*) Diese Größen sind demnach sowohl von der besonderen Wahl der eben genannten Lösungen als auch von T unabhängig.

hinreichend, daß der ***Index der Differentialgleichungen*** *(β.) einen positiven Wert hat.* Unter Index verstehen wir eine gewisse den Differentialgleichungen (*β.*) eigentümliche Zahl, deren Definition später angegeben wird.

Indem wir nun einen *positiven* Index der Differentialgleichungen (*β.*) voraussetzen, wollen wir Lösungen von (*α.*) und (*β.*) in derselben Weise wie bisher vergleichen, *jedoch wollen wir die Annahme, daß die* $x_m, x'_m, \dots x_m^{\mu_m-1}$ $(m = 1, 2, \dots n)$ *für den Anfangswert von* t *bei beiden Lösungen die gleichen sind, fallen lassen.* Der Index 0 möge im folgenden auf den Anfangswert von t hindeuten, während im übrigen die Bezeichnungen dem Vorhergehenden entsprechen. *Sind dann*

$$|\overline{\overline{x_{m0}} - \overline{x_{m0}}}|, |\overline{\overline{x'_{m0}} - \overline{x'_{m0}}}|, \dots |\overline{\overline{x_{m0}^{\mu_m-1}} - \overline{x_{m0}^{\mu_m-1}}}| \qquad (m=1, 2, \dots n)$$

und ε *nicht größer als gewisse den Differentialgleichungen* (*β.*) *zugeordnete positive Zahlen, so haben wir im Intervall* T

$$(\delta.) \quad \begin{aligned} &\sum_{m=1}^{n}\left[|\overline{\overline{x_m} - \overline{x_m}}| + |\overline{\overline{x'_m} - \overline{x'_m}}| + \dots + |\overline{\overline{x_m^{\mu_m-1}} - \overline{x_m^{\mu_m-1}}}|\right] \\ &\overline{\overline{<}} g \cdot \varepsilon + h \cdot \sum_{m=1}^{n}\left[|\overline{\overline{x_{m0}} - \overline{x_{m0}}}| + |\overline{\overline{x'_{m0}} - \overline{x'_{m0}}}| + \dots + |\overline{\overline{x_{m0}^{\mu_m-1}} - \overline{x_{m0}^{\mu_m-1}}}|\right], \end{aligned}$$

wobei g, h *den Differentialgleichungen* β *zugeordnete Zahlen bedeuten.*

Die Ungleichungen (*α.*) treten sehr häufig in der Weise auf, daß ihr Bestehen für ein mit $t = t_0$ beginnendes, zusammenhängendes t-Gebiet angenommen wird. Dieses letztere t-Gebiet ist nicht unmittelbar gegeben, es wird aber als bekannt angesehen, daß, falls möglicherweise das genannte Gebiet nicht alle $t \overline{\overline{>}} t_0$ umfaßt und die $x_m, x'_m, \dots x_m^{\mu_m-1}$ $(m = 1, 2, \dots n)$ zwischen endlichen Grenzen bleiben, die Stelle $x_m, x'_m, \dots x_m^{\mu_m-1}, t$ $(m = 1, 2, \dots n)$ einer Grenzstelle*) beliebig nahe kommen muß. Unser Theorem gestattet dann häufig, die Gültigkeit der Ungleichungen (*α.*) für ein t-Gebiet zu erweisen, welches für die angestrebten Zwecke genügt. Dabei wird vorausgesetzt, daß man die Differentialgleichungen (*β.*) hinreichend beherrscht.

Im vorhergehenden habe ich auf die hauptsächlichsten Resultate dieser Arbeit hingewiesen. Weitere Untersuchungen sollen einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben, hier mögen einige Andeutungen genügen.

Die Differentialgleichungen mit positivem Index besitzen bemerkenswerte Eigenschaften, welche zum Teil denjenigen ähnlich sind, die einer

*) Der Begriff der Grenzstelle tritt später bei Einführung des Gebietes, in welchem die X_i definiert sind, auf.

von mir früher untersuchten Klasse von Differentialgleichungen zukommen.*) Es kann der Fall eintreten, daß Differentialgleichungen der Form ($\beta.$) vorliegen, wobei die X_i als Summen von je zwei Summanden erscheinen, von denen die ersten die Rolle von Hauptgliedern, die zweiten die Rolle von Korrektions- oder Störungsgliedern spielen. Beherrscht man dann diejenigen Differentialgleichungen, welche durch Weglassen der Störungsglieder erhalten werden, und haben diese Differentialgleichungen einen positiven Index**), so kann unter sehr allgemeinen Voraussetzungen die Methode der sukzessiven Approximationen zur Anwendung kommen. Hierbei ist der bekannte Grad der erreichten Annäherung von der Größe des zugrunde gelegten t-Gebietes unabhängig.

Das Hauptanwendungsgebiet der erwähnten Theorien ist die „irdische" Mechanik, in welcher die Zerstreuung der Energie eine wesentliche Rolle spielt. Die Methoden der genannten Untersuchungen sind auch häufig nützlich, wenn der irdischen Mechanik angehörende Bewegungen vorliegen, die unter sich *langsam* ändernden Bedinguugen vor sich gehen. Hierbei ist nicht ausgeschlossen, daß die erwähnten Änderungen in den Bedingungen mit der Zeit bedeutend werden. Bei derartigen Bewegungen ist es häufig *nicht* möglich, allen unbekannten Einflüssen dadurch Rechnung zu tragen, daß man die Differentialgleichungen durch Differentialungleichungen in der oben genannten Weise ersetzt, wofern verlangt wird, daß die linken Seiten der Ungleichungen ($\alpha.$) vollkommen bekannt sein sollen. Um dieses zu erläutern, bilden wir den Ausdruck $\sin(k \cdot t + m)$. Hierin sollen m und die von Null verschiedene Größe k Konstanten sein, während die unbeschränkt variable Größe t die Zeit ausdrücke. Der genaue Wert

---

*) *P. Bohl*, Über gew. Differentialgleichungen allg. Charakters, die in der Mechanik Anwendung finden. Dorpat 1900 (russisch). Eine französische Übersetzung findet sich im Bulletin de la Soc. Math. de France, t. XXXVIII. Die erwähnte Ähnlichkeit bezieht sich auf den Fall, in welchem die „charakteristische Gleichung" nur Wurzeln mit negativem reellen Teil besitzt.

**) Es muß übrigens darauf hingewiesen werden, daß bei den hier angedeuteten Untersuchungen weniger der Index als vielmehr zwei auch in dieser Arbeit benutzte Größen hervortreten. Es sind dies die später eingeführten *Stabilitätskoeffizienten*. Bei der Verwertung dieser Koeffizienten zeigt sich auch die Bedeutung der in Rede stehenden Untersuchungen für die Betrachtung mechanischer Vorgänge von „langer", aber nicht unbeschränkt langer Dauer.

von k sei nicht bekannt, wohl aber sei ein Näherungswert c gegeben. Setzen wir dann

$$(\varepsilon.) \qquad \sin(kt+m) = \sin(ct+m) + p,$$

so kann auf Grund der Voraussetzung, daß $|c-k|$ eine „kleine" Größe ist, $|p|$ noch nicht als „kleine" Größe angenommen werden. Wohl aber kann man

$$(\vartheta.) \qquad \sin(kt+m) = \sin(ct+\psi)$$

setzen und ψ eine „langsam" veränderliche Größe nennen. Derartige Argumente $ct+\psi$, wobei die c-Größen bekannte Konstanten, die ψ unbekannte „langsam" veränderliche Größen sind, treten überhaupt häufig auf. In der irdischen Mechanik kann man nun häufig eine approximative Lösung erhalten, wenn man zunächst die ψ durch unbestimmte Konstanten ersetzt, darauf die oben erwähnten Methoden anwendet und schließlich die eingeführten Konstanten wieder durch die ψ ersetzt. Obgleich die nicht vollständig bekannten ψ-Größen hiernach in der Lösung wieder auftreten, gewährt dieses Verfahren nicht selten einen Einblick in die Natur der betrachteten Bewegung. Insbesondere gilt dieses häufig beim Auftreten trigonometrischer Reihen. Diese flüchtigen und naturgemäß unbestimmten Andeutungen sollen darauf hinweisen, welche Bedeutung dem Auftreten eines positiven Index zukommt.

Es möge schließlich noch eine Bemerkung über das Verhältnis der irdischen zu der idealen und Himmelsmechanik Platz finden. Erstrebt man die Integration der vorkommenden Differentialgleichungen in „endlicher Form", so hat man von der Berücksichtigung von Gliedern, die Dämpfungen, Widerstände usw. ausdrücken, natürlich keine Vereinfachung zu erwarten. Dagegen bietet für die Anwendung von Approximationsmethoden die irdische Mechanik ein weit dankbareres Feld als die ideale oder Himmelsmechanik. Der Grund dafür liegt wohl in dem Umstand, daß die in der ersteren vorkommenden Bewegungen gewöhnlich Tendenzen aufweisen, die in Ungleichungen zum Ausdruck gelangen. Geht man von einer einfachen bekannten Bewegungsform aus, so bleiben bei kleinen Änderungen der Bedingungen diese Ungleichungen häufig bestehen und gestatten Schlüsse hinsichtlich des Bewegungsverlaufs. In der idealen Mechanik fehlen gerade in den wichtigsten Fällen Ungleichungen von entsprechender Allgemeinheit, während Gleichungen gegenüber kleinen Ände-

rungen der Bedingungen meist nicht ihre Geltung bewahren. Die Bewegungen der irdischen Mechanik haben wohl stets weniger Interesse erregt als die Probleme der idealen Mechanik. Dies mag unter anderem damit zusammenhängen, daß die Gesetze, welche zur Aufstellung der Differentialgleichungen führen, im ersten Fall weniger genau bekannt sind. Andererseits muß aber hervorgehoben werden, daß eine bloß näherungsweise Kenntnis dieser Gesetze in der irdischen Mechanik häufig genügt, um eine näherungsweise Kenntnis der Bewegung unabhängig von dem betrachteten Zeitraum zu gewinnen, während für die ideale Mechanik Entsprechendes *nicht* gilt.

Das Anwendungsgebiet der in dieser Arbeit betrachteten Differentialgleichungen und Differentialungleichungen ist übrigens natürlich nicht auf die eigentliche Mechanik beschränkt.

I. Index. — Stabilitätskoeffizienten. — Ein Hilfssatz.

§ 1.

Es liege ein System positiver Funktionen $f(t)$ vor, von denen jede einzelne für ein entsprechendes t-Gebiet definiert sein möge. Wir wählen eine Konstante α beliebig aus und fassen alle Ausdrücke der Form

$$\frac{e^{\alpha t_2} f(t_2)}{e^{\alpha t_1} f(t_1)} \tag{1.}$$

ins Auge. Hierbei ist $f(t)$ irgendeine der genannten Funktionen und t_1 und t_2 gehören dem $f(t)$ entsprechenden t-Gebiet an; außerdem sei $t_2 \gtreqless t_1$. Falls die Brüche (1.) unterhalb einer endlichen Grenze liegen, sagen wir, daß α eine Größe erster Klasse ist, andernfalls rechnen wir α zur zweiten Klasse. Ist α erster Klasse, so gehören alle kleineren α ebenfalls zur ersten Klasse; ist α zweiter Klasse, so gehören auch alle größeren α zur zweiten Klasse. Es können nun folgende Fälle auftreten:

1. Es gibt α-Größen von *beiden* Klassen. Es existiert dann ein solcher Wert g, daß alle $\alpha < g$ zur ersten, alle $\alpha > g$ zur zweiten Klasse gehören. Wir nennen dann g den ***Index*** des Funktionensystems.

2. Es gibt nur α-Größen der *ersten* Klasse. Wir sagen dann, der Index sei ∞.

3. Es gibt nur α-Größen der *zweiten* Klasse. Wir sagen dann, der Index sei $-\infty$.

Im Falle 2. rechnen wir den Index zu den positiven, im Falle 3. zu den negativen.

Ist der Index nicht gleich $-\infty$, so gibt es nach dem Vorhergehenden solche Zahlen α, k, daß stets

$$f(t_2) \overline{\overline{<}} k \cdot e^{-\alpha(t_2-t_1)} \cdot f(t_1) \tag{2.}$$

gilt, wenn die Bezeichnungen wie vorhin gewählt werden und wieder $t_2 > t_1$ ist. Bei einem Index, der gleich $-\infty$ ist, können jedoch solche Zahlen α, k nicht existieren. Ist andererseits die Existenz eines solchen Zahlenpaares α, k bekannt, so ist der Index $\overline{\overline{>}} \alpha$ und möglicherweise ∞.

Liegen zwei Konstanten α, k der eben besprochenen Art vor), so wollen wir sagen*

$$\frac{\alpha}{k},\ k \tag{3.}$$

seien Stabilitätskoeffizienten. Dabei heiße $\frac{\alpha}{k}$ Hauptkoeffizient und k Nebenkoeffizient.

Nennen wir im folgenden ein Paar Stabilitätskoeffizienten, so ist der erstgenannte der Hauptkoeffizient, der an zweiter Stelle genannte der Nebenkoeffizient. Der Nebenkoeffizient ist nach dem vorigen stets $\overline{\overline{>}} 1$. Ist der Index positiv (ein für uns besonders wichtiger Fall), so gibt es unendlich viele Paare von Stabilitätskoeffizienten mit positivem Hauptkoeffizient. Existiert umgekehrt ein Paar von Stabilitätskoeffizienten mit positivem Hauptkoeffizient, so muß der Index positiv sein.

Schließlich mag noch folgende Bemerkung Platz finden. Es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ein Paar von Stabilitätskoeffizienten. Es mögen nun Abänderungen in den Voraussetzungen zugelassen werden, wofern diese Änderungen darin bestehen, daß gewisse Funktionen $f(t)$ fortfallen oder auf ein Teilgebiet des entsprechenden t-Gebiets beschränkt werden. *Dann stellen (falls nicht alle Funktionen fortgefallen sind) ε_1 und ε_2 auch unter den veränderten Verhältnissen Stabilitätskoeffizienten dar.*

§ 2.

Es sei nun eine Schar von Systemen linearer homogener Differentialgleichungen gegeben. Die Form eines dieser Systeme ist

---

*) Es gilt dann natürlich $k \overline{\overline{>}} 1$.

$$(4.) \qquad \frac{d^{\mu_i} x_i}{dt^{\mu_i}} - \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu_m-1} a_{m\nu} \frac{d^\nu x_m}{dt^\nu} \right) = 0. \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

Jedes einzelne System beziehe sich auf ein entsprechendes zusammenhängendes nicht punktförmiges t-Gebiet, in welchem die a-Koeffizienten stetige Funktionen von t seien. Der Differentialquotient von der Ordnung 0 bedeutet in (4.) die Funktion selbst, von der die Ableitung gebildet werden soll. Für jede nicht triviale Lösung eines Systems der Form (4.) denken wir uns die Größe

$$(5.) \qquad \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{\nu=0}^{\mu_m-1} \left| \frac{d^\nu x_m}{dt^\nu} \right| \right)$$

gebildet. *Unter dem Index der vorliegenden Schar von Differentialgleichungen verstehen wir den Index derjenigen Funktionen, die überhaupt in der eben genannten Weise erhalten werden. Ist dieser Index nicht gleich* $-\infty$, *so verstehen wir unter Stabilitätskoeffizienten der Schar die Stabilitätskoeffizienten des eben erwähnten Systems von positiven Funktionen.* Auch die Bezeichnungen Haupt- und Nebenkoeffizient mögen in analoger Weise für die Schar linearer Differentialgleichungen eingeführt werden.

Ersetzt man die linearen Differentialgleichungen in bekannter Weise durch lineare Differentialgleichungen erster Ordnung, so stimmen Index und (wenn der Index nicht gleich $-\infty$ ist) Stabilitätskoeffizienten für die neue und frühere Schar überein.

Wir wenden uns nun zu Differentialgleichungen der Form (β.) in der Einleitung. Die allgemeinen Voraussetzungen hinsichtlich der Funktionen X_i seien derartig, daß die Differentialgleichungen (β.) Variationsgleichungen besitzen; und zwar mögen diese Variationsgleichungen in der Form der zu Anfang dieses Paragraphen betrachteten Schar von Systemen linearer Differentialgleichungen auftreten. *Unter dem Index der Differentialgleichungen* (β.) *verstehen wir dann den Index der genannten Variationsgleichungen. Ist der Index nicht gleich* $-\infty$, *so nennen wir ferner die Stabilitätskoeffizienten der Variationsgleichungen auch Stabilitätskoeffizienten der Differentialgleichungen* (β.). *Die Bezeichnungen Haupt- und Nebenkoeffizient bleiben hierbei bestehen.*

Eine Schar von der zu Anfang des Paragraphen eingeführten Form hat Variationsgleichungen, die die gleiche Form wie die Schar haben. Die eben eingeführte Regel führt daher zu keinem Widerspruch mit dem Vorhergehenden.

§ 3.

In diesem und dem folgenden Paragraphen beweisen wir gewisse Hilfssätze. Dieselben können übrigens bei verschiedenen Untersuchungen von Nutzen sein, und es ist daher nicht leicht festzustellen, ob die genannten Sätze wirklich neu sind.

Für das Intervall von $t=\alpha$ bis $t=\beta$ ($\beta>\alpha$, α und β gehören zum Intervall) sei eine Funktion $f(t)$ gegeben, die mit Ableitungen erster und zweiter Ordnung versehen sei. Die Schwankung von $f(t)$ bezeichnen wir mit a, diejenige von $|f'(t)|$ mit b und setzen $|f''(t)| \leqq M$ (M konstant) voraus. Dann gilt, wie wir behaupten,

$$2aM \geqq b^2. \tag{6.}$$

Um diesen Satz zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß seine Richtigkeit für $a=0$ und ebenso für $b=0$ evident ist. Wir können also $a \neq 0$, $b \neq 0$ annehmen. Es werde nun t_0 so gewählt, daß $|f'(t)|$ für $t=t_0$ den Maximalwert annimmt; den letzteren bezeichnen wir mit μ. Wir unterscheiden nun zwei Fälle, je nachdem es im vorliegenden Intervall einen t-Wert gibt, der sich von t_0 um $2\cdot\frac{a}{b}$ unterscheidet, oder aber ein solcher t-Wert nicht existiert. Es möge zunächst der erste Fall betrachtet werden. Wir bezeichnen mit τ einen t-Wert der eben genannten Art. Es ist

$$f(\tau)-f(t_0)=f'(t_0)(\tau-t_0)+\frac{(\tau-t_0)^2}{2}f''(t_0+\vartheta(\tau-t_0)),\quad 0<\vartheta<1, \tag{7.}$$

$$f''(t_0+\vartheta(\tau-t_0))=\frac{2[f(\tau)-f(t_0)]}{(\tau-t_0)^2}-\frac{2f'(t_0)}{\tau-t_0}, \tag{8.}$$

$$M \geqq |f''(t_0+\vartheta(\tau-t_0))| \geqq \frac{2|f'(t_0)|}{2\frac{a}{b}}-\frac{2|f(\tau)-f(t_0)|}{4\frac{a^2}{b^2}} \tag{9.}$$

$$\geqq \frac{\mu b}{a}-\frac{b^2}{2a} \geqq \frac{b^2}{a}-\frac{b^2}{2a}=\frac{b^2}{2a}.$$

Hieraus folgt sofort die Richtigkeit von (6.).

Wir gehen nun zur Betrachtung des zweiten Falles über. θ sei ein t-Wert, für welchen $|f'(t)|$ den Minimalwert annimmt. Dann ist

$$b=|f'(t_0)|-|f'(\theta)| \tag{10.}$$

und θ von t_0 verschieden. Wir haben

$$\frac{f'(t_0)-f'(\theta)}{t_0-\theta}=f''(t_0+\varkappa(\theta-t_0)),\qquad 0<\varkappa<1. \tag{11.}$$

Man beachte nun, daß im vorliegenden „Fall 2“ $|t_0 - \theta| < 2\,\frac{a}{b}$ sein muß. Man erhält

$$(12.) \qquad M \geqq |f''(t_0 + \varkappa(\theta - t_0))| = \left|\frac{f'(t_0) - f'(\theta)}{t_0 - \theta}\right| \geqq \frac{|f'(t_0)| - |f'(\theta)|}{2\,\frac{a}{b}} = \frac{b^2}{2a}.$$

Hieraus folgt die Richtigkeit von (6.) sofort.

§ 4.

Für alle t des Intervalls $\alpha \leqq t \leqq \beta$ $(\beta > \alpha)$ möge die Funktion $f(t)$ gegeben und mit Ableitungen bis zur Ordnung μ inkl. $(\mu \geqq 2)$ versehen sein. $|f^{\mu}(t)|$ besitze eine endliche obere Grenze. Jede der Ableitungen $f', f'', \ldots f^{(\mu-1)}$ möge im gegebenen t-Intervall wenigstens einmal gleich Null werden. Das Symbol $[\nu]$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots \mu)$ bezeichne die obere Grenze von $|f^{(\nu)}(t)|$ im genannten t-Intervall, wobei $f^{(0)}(t)$ die Funktion $f(t)$ selbst bedeutet. *Auf Grund des im vorigen Paragraphen Gefundenen können wir dann den Satz beweisen, daß*

$$(13.) \qquad 2^{\mu \cdot q(\mu-q)} \cdot [\mu]^q \cdot [0]^{\mu-q} \geqq [q]^{\mu} \qquad (q = 1, 2, \ldots \mu - 1)$$

gilt.

Zunächst ist es klar, daß der Satz für $\mu = 2$ gilt, und wir werden beweisen, daß die Gültigkeit für $\mu = 2, 3, \ldots n$ die Gültigkeit für $\mu = n + 1$ nach sich zieht. *Wir nehmen demgemäß an, daß die Behauptung* (13.) *für* $\mu = 2, 3, \ldots n$ *richtig ist.* Es seien nun die Voraussetzungen für ein $\mu = n + 1$ erfüllt. Wir bemerken zunächst, daß die $[1], [2], \ldots [n]$ dann entweder alle gleich 0 oder alle von Null verschieden sind. Im ersten Falle bedarf die Behauptung keines Beweises, so daß wir die genannten Größen als von 0 verschieden ansehen dürfen. Zwischen den Zahlen 0 und $n + 1$ schalten wir ganze Zahlen g und h so ein, daß $0 < g < h < n + 1$ gilt. Die gemachte Annahme gestattet dann die Aufstellung folgender Ungleichungen:

$$(14.) \qquad 2^{g \cdot h\,(h-g)} [h]^g [0]^{h-g} \geqq [g]^h,$$

$$(15.) \qquad 2^{(h-g)(n+1-g)(n+1-h)} [n+1]^{h-g} [g]^{n+1-h} \geqq [h]^{n+1-g}.$$

Hieraus folgt nach einfachen Rechnungen

$$(16.) \qquad 2^{(n+1)\,h(n+1-h)} [n+1]^h [0]^{n+1-h} \geqq [h]^{n+1},$$

$$(17.) \qquad 2^{(n+1)\,g(n+1-g)} [n+1]^g [0]^{n+1-g} \geqq [g]^{n+1}.$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Streicht man die Voraussetzung, daß $f', f'', \ldots f^{\mu-1}$ im gegebenen t-Intervall auch den Wert 0 annehmen, so kann man zu $f(t)$ eine solche Zusatzfunktion hinzufügen, daß die Voraussetzungen für die geänderte Funktion zutreffen. Auf diese Weise kann man zu Sätzen von Interesse gelangen. Da wir aber diese Sätze nicht nötig haben, und, wie gesagt, es zweifelhaft ist, ob sie neu sind, so verzichte ich auf eine genauere Auseinandersetzung.

II. Die Existenz eines positiven Index als notwendige Bedingung.

§ 5.

Wir schreiben die Differentialungleichungen ($\alpha.$) und die Differentialgleichungen ($\beta.$) der Einleitung nochmals hin und geben die Voraussetzungen genauer an.

$$\text{(18.)} \qquad \left| \frac{d^{\mu_i} x_i}{dt^{\mu_i}} - X_i \right| \leqq \varepsilon, \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

$$\text{(19.)} \qquad \frac{d^{\mu_i} x_i}{dt^{\mu_i}} - X_i = 0. \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

Die X_i sind Funktionen von $t, x_m, x_m', \ldots x_m^{\mu_m - 1}$ $(m = 1, 2, \ldots n)$, wobei x_m', x_m'' usw. in üblicher Weise Differentialquotienten nach t bezeichnen*), und zwar gilt dies für ein gewisses Gebiet G der als unabhängige Variable gedachten $t, x_m, x_m', \ldots x_m^{\mu_m - 1}$ $(m = 1, 2, \ldots n)$. Dieses Gebiet G sei zusammenhängend und enthalte nur „innere" Punkte**). Wir setzen auch voraus, daß alle zu einem festen t-Wert gehörenden Punkte von G ein „nirgends konkaves" zusammenhängendes Gebiet***) der $x_m, x_m', \ldots x_m^{\mu_m - 1}$ bilden. In dem Gebiete G seien die X_i stetige Funktionen und mit stetigen Differentialquotienten erster Ordnung nach den $x_1, x_1', \ldots x_n^{\mu_n - 1}$ versehen. Diese Differentialquotienten mögen zwischen festen endlichen Grenzen liegen

---

*) Das Zeichen x_m^0 würde hier x_m bedeuten.

**) Innerer Punkt heißt ein Punkt, in dessen genügend klein gewählter Umgebung nur Punkte des Gebietes G vorkommen. „Grenzpunkt" nennen wir einen Punkt, dessen beliebig klein gewählte Umgebung stets sowohl Punkte von G als auch nicht zu G gehörige Punkte enthält.

***) Damit soll folgende Eigenschaft gefordert werden: Sind $\underline{x_1}, \underline{x_1'}, \ldots \underline{x_n^{\mu_n - 1}}$ und $\underline{\underline{x_1}}, \underline{\underline{x_1'}}, \ldots \underline{\underline{x_n^{\mu_n - 1}}}$ Stellen des Gebietes, so ist auch

$$\underline{x_1} + \vartheta(\underline{\underline{x_1}} - \underline{x_1}), \underline{x_1'} + \vartheta(\underline{\underline{x_1'}} - \underline{x_1'}), \ldots \underline{x_n^{\mu_n - 1}} + \vartheta(\underline{\underline{x_n^{\mu_n - 1}}} - \underline{x_n^{\mu_n - 1}})$$

eine Stelle desselben, falls $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ gilt.

und bei Veränderungen der $x_1, x_1', \ldots x_n^{\mu_n - 1}$ sogar (im Gebiete G) gleichmäßig stetig sein.

Wir setzen nun voraus, daß die Ungleichungen (18.) *und Gleichungen* (19.) *das in der Einleitung beschriebene Verhalten zeigen.* Um den Inhalt dieser Voraussetzung zu kennzeichnen, möge irgendeine Lösung der Ungleichungen (18.) für ein mit $t = t_0$ beginnendes zusammenhängendes nicht punktförmiges t-Gebiet T als vorliegend angesehen werden. Wir vergleichen diese Lösung von (18.) mit derjenigen Lösung der Differential*gleichungen* (19.), welche für $t = t_0$ dieselben Werte von $x_1, x_1', \ldots x_n^{\mu_n - 1}$ aufweist, wie die Lösung von (18.). Die Lösung von (19.) denken wir uns dabei möglichst weit über t_0 hinaus über ein zusammenhängendes t-Gebiet θ erstreckt*) und vergleichen die beiden Lösungen für das T und θ gemeinsame Gebiet. *Gemäß der Voraussetzung gibt es nun solche von vornherein vorliegende, von der Wahl der zugrunde gelegten Lösung unabhängige Konstanten k und $e > 0$, daß, wenigstens wenn $\varepsilon \leqq e$ ist, die genannte Vergleichung*

$$\sum_{\mu=1}^{n} |\overline{\overline{x_\mu}} - \overline{x_\mu}| \leqq k \cdot \varepsilon \tag{20.}$$

*ergibt***).

§ 6.

Indem wir dazu übergehen, die Konsequenzen dieser Annahme zu entwickeln, beschäftigen wir uns zunächst mit der Feststellung, *daß eine solche von vornherein vorliegende positive Konstante h existiert, daß bei der genannten Vergleichung auch*

$$|\overline{\overline{x_1}} - \overline{x_1}| + |\overline{\overline{x_1'}} - \overline{x_1'}| + \cdots + |\overline{\overline{x_n^{\mu_n - 1}}} - \overline{x_n^{\mu_n - 1}}| \leqq h \cdot \varepsilon \tag{21.}$$

sich ergibt.

Um die aufgestellte Behauptung zu erweisen, bemerken wir zunächst, daß von vornherein eine solche Konstante $q \geqq 0$ existiert, daß für das T und θ gemeinsame Gebiet

---

*) Sollte das Gebiet θ alle t enthalten, die der Bedingung $t_0 \leqq t < t'$ genügen, aber keine t, welche größer als t' sind, so müßte die Lösung von (19.) im Gebiete $t_0 \leqq t < t'$ Grenzstellen beliebig nahe kommen oder die $x_1, x_1', \ldots x_n^{\mu_n - 1}$ dürften nicht zwischen endlichen Grenzen liegen.

**) Die über die Buchstaben gesetzten Striche deuten auf die Lösung von (18.) und (19.) hin. Die Bezeichnung weicht von der in der Einleitung gebrauchten etwas ab.

$$(22.)\qquad \left|\frac{d^{\mu_\nu}}{dt^{\mu_\nu}}(\bar{\bar{x}}_\nu - \bar{x}_\nu)\right| \overline{\overline{<}}\, q\cdot S+\varepsilon \qquad (\nu=1,2,\dots n)$$

gilt. Hierbei ist

$$(23.)\qquad S=|\bar{\bar{x}}_1-\bar{x}_1|+|\bar{\bar{x}}_1'-\bar{x}_1'|+\cdots+|\bar{\bar{x}}_n^{\mu_n-1}-\bar{x}_n^{\mu_n-1}|.$$

Wir wählen nun aus dem T und θ gemeinsamen Gebiet einen t-Wert $t'>t_0$ beliebig aus. γ sei der größte Wert, welcher unter den

$$(24.)\quad |\bar{\bar{x}}_1'-\bar{x}_1'|,\ |\bar{\bar{x}}_1''-\bar{x}_1''|,\dots|\bar{\bar{x}}_1^{\mu_1-1}-\bar{x}_1^{\mu_1-1}|,\ |\bar{\bar{x}}_2'-\bar{x}_2'|,\dots|\bar{\bar{x}}_n^{\mu_n-1}-\bar{x}_n^{\mu_n-1}|$$

im Gebiete $t_0 \overline{\overline{<}}\, t \overline{\overline{<}}\, t'$ vorkommt*). Der Wert γ wird im genannten t-Gebiet mindestens von einer der Größen (24.) angenommen; es sei dies etwa für $|\bar{\bar{x}}_m^\sigma-\bar{x}_m^\sigma|$ der Fall. Bedeutet noch N die Anzahl der Größen (24.), so haben wir im Gebiete $t_0 \overline{\overline{<}}\, t \overline{\overline{<}}\, t'$

$$(25.)\quad \begin{cases} S \overline{\overline{<}}\, k\cdot\varepsilon+N\cdot\gamma, \\ \left|\dfrac{d^{\mu_m}}{dt^{\mu_m}}(\bar{\bar{x}}_m-\bar{x}_m)\right| \overline{\overline{<}}\, q\cdot S+\varepsilon \overline{\overline{<}}\, (q\cdot k+1)\varepsilon+q\cdot N\cdot\gamma, \quad |\bar{\bar{x}}_m-\bar{x}_m| \overline{\overline{<}}\, k\cdot\varepsilon \end{cases}$$

und γ ist der Maximalwert von $|\bar{\bar{x}}_m^\sigma-\bar{x}_m^\sigma|$ im Gebiete $t_0 \overline{\overline{<}}\, t \overline{\overline{<}}\, t'$.

Wir wenden nun den Hilfssatz des § 4 an. Es ergibt sich

$$(26.)\qquad 2^{\sigma\cdot\mu_m(\mu_m-\sigma)}\cdot(k\varepsilon)^{\mu_m-\sigma}\cdot([qk+1]\cdot\varepsilon+qN\gamma)^\sigma \overline{\overline{>}}\, \gamma^{\mu_m}.$$

Da wir uns auf den Fall $\varepsilon>0$ beschränken dürfen, folgt aus (26.)

$$(27.)\qquad 2^{\sigma\cdot\mu_m(\mu_m-\sigma)}\cdot k^{\mu_m-\sigma}\left[qk+1+qN\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)\right]^\sigma \overline{\overline{>}}\, \left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)^{\mu_m}.$$

Wir betrachten nun die Gleichung

$$(28.)\qquad (2^{\sigma\cdot\mu_m}\cdot k)^{\mu_m-\sigma}[q\cdot k+1+q\cdot N\cdot\omega]^\sigma=\omega^{\mu_m}$$

oder vielmehr die Gleichungen, die aus (28.) entstehen, wenn man für σ und μ_m alle überhaupt hier in Betracht kommenden Zahlen setzt. Es gibt offenbar von vornherein eine solche Zahl $r>0$, daß jede etwa vorkommende reelle Wurzel einer der genannten Gleichungen $\overline{\overline{<}}\, r$ ist. Für $\omega>r$ ist dann die rechte Seite von (28.) größer als die linke.

Aus (27.) folgt nun $\frac{\gamma}{\varepsilon} \overline{\overline{<}}\, r$. Jede der Größen (24.) ist daher $\overline{\overline{<}}\, r\cdot\varepsilon$. *Damit ist die Richtigkeit unserer Behauptung bewiesen.*

§ 7.

Wir denken uns nun eine Lösung von (19.), welche sich auf ein mit t_0 beginnendes t-Gebiet erstreckt und möglichst weit fortgesetzt ist.

*) Wenn wenigstens eine der Größen μ_ν $(\nu=1,2,\dots n)$ gleich 1 ist, so ist die oben angewandte Bezeichnung nicht ganz korrekt. Die dann eintretenden kleinen Modifikationen ergeben sich von selbst.

Für diese Lösung bilden wir die Variationsgleichungen, d. h. die Gleichungen

$$(29.)\qquad \frac{d^{\mu_i}\xi_i}{dt^{\mu_i}} = \overline{\frac{\partial X_i}{\partial x_1}}\,\xi_1 + \overline{\frac{\partial X_i}{\partial x_1'}}\,\xi_1' + \cdots + \overline{\frac{\partial X_i}{\partial x_n^{\mu_n-1}}}\,\xi_n^{\mu_n-1}. \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

Hierbei sollen die horizontalen Striche über den Koeffizienten von ξ_1, ξ_1' usw. darauf hinweisen, daß in den betreffenden Größen $x_1, x_1', \ldots x_n^{\mu_n-1}$ für die betrachtete Lösung von (19.) zu bilden sind.

Außer den Gleichungen (29.) bilden wir noch die Gleichungen

$$(30.)\qquad \frac{d^{\mu_i}u_i}{dt^{\mu_i}} = \overline{\frac{\partial X_i}{\partial x_1}}\,u_1 + \overline{\frac{\partial X_i}{\partial x_1'}}\,u_1' + \cdots + \overline{\frac{\partial X_i}{\partial x_n^{\mu_n-1}}}\,u_n^{\mu_n-1} + U_i(t). \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

Hierbei bedeuten die $U_i(t)$ irgendwelche stetige für das betrachtete t-Gebiet gewählte Funktionen, *welche dem absoluten Betrage nach nicht größer als eine Konstante b sind.*

Ehe wir weiter gehen, schalten wir eine Bemerkung ein, deren Richtigkeit daraus hervorgeht, daß die partiellen Ableitungen der X_i nach den $x_1, x_1', \ldots x_n^{\mu_n-1}$ bei Änderungen dieser letztgenannten Größen gleichmäßig stetig sind.

Bildet man eine der genannten Ableitungen für die beiden zulässigen Systeme

$$t = \mathfrak{t},\ x_1 = \underline{x}_1,\ x_1' = \underline{x}_1', \ldots x_n^{\mu_n-1} = \underline{x}_n^{\mu_n-1} \quad \text{und}$$

$$t = \mathfrak{t},\ x_1 = \underline{\underline{x}}_1,\ x_1' = \underline{\underline{x}}_1', \ldots x_n^{\mu_n-1} = \underline{\underline{x}}_n^{\mu_n-1},$$

so unterscheiden sich die gefundenen Werte um weniger als $\varphi(p)$, wenn

$$(31.)\qquad |\underline{\underline{x}}_1 - \underline{x}_1| + |\underline{\underline{x}}_1' - \underline{x}_1'| + \cdots + |\underline{\underline{x}}_n^{\mu_n-1} - \underline{x}_n^{\mu_n-1}| \leqq p$$

gilt. Hierbei ist p eine beliebige positive Größe, φ eine positive Funktion, die wir so wählen können, daß sie mit abnehmenden p nicht zunimmt und gleichzeitig mit p nach 0 konvergiert. Das im folgenden eventuell vorkommende Zeichen $\varphi(0)$ mag Null bedeuten.

Nun denken wir uns diejenige Lösung von (30.), welche für $t = t_0$ $u_1 = u_1' = \cdots = u_n^{\mu_n-1} = 0$ aufweist. Nachdem wir aus dem t-Gebiet, über welches sich die Lösung erstreckt, einen Wert $t' > t_0$ beliebig gewählt haben, bezeichnen wir mit δ den Maximalwert von $|u_1| + |u_1'| + \cdots + |u_n^{\mu_n-1}|$ im Gebiete $t_0 \leqq t \leqq t'$. Hierauf wählen wir eine positive Konstante ϑ so klein aus, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $t,\ x_1 = \overline{x}_1 + \vartheta u_1,\ x_1' = \overline{x}_1' + \vartheta u_1', \ldots x_n^{\mu_n-1} = \overline{x}_n^{\mu_n-1} + \vartheta u_n^{\mu_n-1}$

sind für $t_0 \leqq t \leqq t'$ Stellen von G.

2. Es gilt

$$\vartheta \cdot b + \varphi(\vartheta \cdot \delta) \cdot \vartheta \cdot \delta \overline{\overline{<}} e.$$

Nun haben wir

$$\begin{aligned}
&\frac{d^{\mu_i}}{dt^{\mu_i}}[\overline{x_i} + \vartheta u_i] - X_i[t, \overline{x_1} + \vartheta u_1,\ \overline{x_1'} + \vartheta u_1',\ \dots\ \overline{x_n^{\mu_n - 1}} + \vartheta u_n^{\mu_n - 1}] \\
&= \vartheta \frac{d^{\mu_i} u_i}{dt^{\mu_i}} - [X_i(t, \overline{x_1} + \vartheta u_1,\ \overline{x_1'} + \vartheta u_1', \dots \overline{x_n^{\mu_n - 1}} + \vartheta u_n^{\mu_n - 1}) - X_i(t, \overline{x_1}, \overline{x_1'}, \dots \overline{x_n^{\mu_n - 1}})] \\
&= \vartheta \cdot U_i(t) + \frac{\overline{\partial X_i}}{\partial x_1} \vartheta \cdot u_1 + \frac{\overline{\partial X_i}}{\partial x_1'} \vartheta \cdot u_1' + \dots + \frac{\overline{\partial X_i}}{\partial x_n^{\mu_n - 1}} \vartheta u_n^{\mu_n - 1} \\
&- \left[\left\{\frac{\partial X_i}{\partial x_1}\right\} \vartheta u_1 + \left\{\frac{\partial X_i}{\partial x_1'}\right\} \vartheta u_1' + \dots + \left\{\frac{\partial X_i}{\partial x_n^{\mu_n - 1}}\right\} \vartheta u_n^{\mu_n - 1}\right].
\end{aligned} \tag{32.}$$

$(i = 1, 2, \dots n)$

Hierbei deutet das Zeichen $\{\}$ an, daß die eingeschlossene Größe für $x_1, x_1', \dots x_n^{\mu_n - 1}$ zu bilden ist, welche sich von $\overline{x_1}, \overline{x_1'}, \dots \overline{x_n^{\mu_n - 1}}$ nicht mehr als um $\vartheta|u_1|, \vartheta|u_1'|, \dots \vartheta|u_n^{\mu_n - 1}|$ unterscheiden.

Aus (32.) folgt

$$\left|\frac{d^{\mu_i}}{dt^{\mu_i}}(\overline{x_i} + \vartheta u_i) - X_i(t, \overline{x_1} + \vartheta u_1, \dots \overline{x_n^{\mu_n - 1}} + \vartheta u_n^{\mu_n - 1})\right| \overline{\overline{<}} \vartheta \cdot b + \varphi(\vartheta \cdot \delta) \cdot \vartheta \cdot \delta. \tag{33.}$$

$(i = 1, 2, \dots n)$

Folglich haben wir gemäß (21.)

$$\vartheta(|u_1| + |u_1'| + \dots + |u_n^{\mu_n - 1}|) \overline{\overline{<}} h[\vartheta b + \varphi(\vartheta \cdot \delta) \cdot \vartheta \cdot \delta] \tag{34.}$$

und

$$|u_1| + |u_1'| + \dots |u_n^{\mu_n - 1}| \overline{\overline{<}} h[b + \varphi(\vartheta \cdot \delta) \cdot \delta]. \tag{35.}$$

Wegen der bei der Wahl von ϑ herrschenden Willkür folgt aus (35.)

$$|u_1| + |u_1'| + \dots + |u_n^{\mu_n - 1}| \overline{\overline{<}} h \cdot b. \tag{36.}$$

Ferner gilt (36.) wegen der bei der Wahl von t' herrschenden Willkür für das ganze t-Gebiet, über welches sich die betrachtete Lösung von (30.) erstreckt.

§ 8.

Um spätere Unterbrechungen zu vermeiden, schalten wir an dieser Stelle zunächst eine Bemerkung ein. Es möge für alle t die Funktion

$$\sum_{m=1}^{\mu+1} a_m \sin m\left(t - t_0 + \frac{\pi}{2}\right) \tag{37.}$$

gebildet werden, wobei t_0 und $a_1, a_2, \dots a_{\mu+1}$ Konstanten bedeuten. Es ist leicht zu sehen, daß man die Konstanten $a_1, a_2, \dots a_{\mu+1}$ so wählen kann, daß der Ausdruck (37.) und seine Differentialquotienten nach t bis zur Ordnung μ inkl. für $t = t_0$ vorgeschriebene Werte annehmen; und zwar ergibt sich hierbei ein bestimmtes System von Konstanten. Falls

für den ν-ten Differentialquotienten hierbei der Wert 1, für die übrigen der Wert 0 vorgeschrieben ist, bezeichnen wir den Ausdruck (37.) mit φ_ν^u. Der Einfachheit wegen verstehen wir hier unter dem 0-ten Differentialquotienten den Ausdruck selbst.

Nach dieser Abschweifung kehren wir zu unserem Gegenstande zurück und betrachten eine Lösung von (30.), für welche bei $t = t_0$

$$(38.) \qquad u_i = u_{i0}, \quad u_i' = u_{i0}', \dots u_i^{\mu_i - 1} = u_{i0}^{\mu_i - 1} \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

gilt. Wir führen neue abhängige Veränderliche ein mittelst der Gleichungen

$$(39.) \qquad p_i = u_i - [\varphi_0^{\mu_i - 1} \cdot u_{i0} + \varphi_1^{\mu_i - 1} \cdot u_{i0}' + \dots + \varphi_{\mu_i - 1}^{\mu_i - 1} \cdot u_{i0}^{\mu_i - 1}], \qquad (i = 1, 2 \dots n)$$

wobei die eben eingeführte Bezeichnungsweise Verwendung findet. Für $t = t_0$ werden $p_1, p_1', \dots p_n^{\mu_n - 1}$ gleich 0.

Die $p_1, p_2, \dots p_n$ genügen nun Gleichungen der Form

$$(40.) \qquad \frac{d^{\mu_i} p_i}{dt^{\mu_i}} = \overline{\frac{\partial X_i}{\partial x_1}} p_1 + \overline{\frac{\partial X_i}{\partial x_1'}} p_1' + \dots + \overline{\frac{\partial X_i}{\partial x_n^{\mu_n - 1}}} \cdot p_n^{\mu_n - 1} + P_i. \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

Hierbei sind die P_i stetige Funktionen von t, deren Absolutwerte nicht größer sind als

$$(41.) \qquad b + G(|u_{10}| + |u_{10}'| + \dots |u_{n0}^{\mu_n - 1}|),$$

wobei G eine von vornherein angebbare Konstante ist. Nach dem vorigen Paragraphen haben wir also

$$(42.) \quad |p_1| + |p_1'| + \dots + |p_n^{\mu_n - 1}| \overline{\leqq} h \cdot b + h \cdot G(|u_{10}| + |u_{10}'| + \dots + |u_{n0}^{\mu_n - 1}|).$$

Mit Rücksicht auf (39.) folgt dann weiter

$$(43.) \quad |u_1| + |u_1'| + \dots + |u_n^{\mu_n - 1}| \overline{\leqq} h \cdot b + H[|u_{10}| + |u_{10}'| + \dots + |u_{n0}^{\mu_n - 1}|],$$

wobei H eine von vornherein angebbare positive Größe ist.

§ 9.

Indem wir zu den Gleichungen (29.) zurückkehren, fassen wir eine mit $t = t_0$ beginnende Lösung derselben ins Auge. Es möge dann

$$(44.) \qquad z_i = e^{\omega \cdot t} \cdot \xi_i \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

gesetzt werden, wobei ω eine positive Konstante bedeutet. Man erhält

$$(45.) \qquad \frac{d^{\mu_i} z_i}{dt^{\mu_i}} = \overline{\frac{\partial X_i}{\partial x_1}} z_1 + \overline{\frac{\partial X_i}{\partial x_1'}} \cdot z_1' + \dots + \overline{\frac{\partial X_i}{\partial x_n^{\mu_n - 1}}} \cdot z_n^{\mu_n - 1} + Z_i. \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

Hierbei bedeuten die Z_i stetige Funktionen von t, welche dem absoluten Betrage nach nicht größer als

$$(46.)\qquad \frac{1}{2h}\left(|z_1|+|z_1'|+\cdots+|z_n^{\mu_n-1}|\right)$$

sind, falls $|\omega|$ nicht größer als eine gewisse von vornherein angebbare positive Zahl ist.

Wir nehmen nun von dem t-Gebiet, auf welches sich unsere Betrachtungen erstrecken, ein Stück von t_0 bis $t' > t_0$ inkl. und bezeichnen den Maximalwert von $|z_1|+|z_1'|+\cdots+|z_n^{\mu_n-1}|$ für dieses Stück mit δ. Dann sind die $|Z_i|$ im Gebiete $t_0 \leqq t \leqq t'$ nicht größer als $\frac{\delta}{2h}$. Wir können dann, wie leicht zu sehen, auf Grund von (43.) schreiben*)

$$(47.)\qquad \delta \leqq h\cdot\frac{\delta}{2h}+H\left[|z_{10}|+|z_{10}'|+\cdots+|z_{n0}^{\mu_n-1}|\right].$$

Es ergibt sich also

$$(48.)\qquad \delta \leqq 2H\left[|z_{10}|+|z_{10}'|+\cdots+|z_{n0}^{\mu_n-1}|\right]$$

und zunächst für das Gebiet $t_0 \leqq t \leqq t'$

$$(49.)\qquad |z_1|+|z_1'|+\cdots+|z_n^{\mu_n-1}| \leqq 2H\left[|z_{10}|+|z_{10}'|+\cdots+|z_{n0}^{\mu_n-1}|\right].$$

(49.) gilt aber offenbar für das *ganze* betrachtete t-Gebiet wegen der bei der Wahl von t' herrschenden Willkür.

Ist nun $|\omega|$ nicht größer als eine gewisse von vornherein angebbare positive Zahl, so gilt

$$(50.)\qquad \begin{aligned}\frac{3e^{\omega\cdot t}}{2}\left[|\xi_1|+|\xi_1'|+\cdots+|\xi_n^{\mu_n-1}|\right] &\geqq |z_1|+|z_1'|+\cdots+|z_n^{\mu_n-1}|\\ &\geqq \frac{e^{\omega\cdot t}}{2}\left[|\xi_1|+|\xi_1'|+\cdots+|\xi_n^{\mu_n-1}|\right].\end{aligned}$$

Mit Hilfe von (49.) erhalten wir also

$$(51.)\qquad \frac{e^{\omega t}}{2}\left[|\xi_1|+|\xi_1'|+\cdots+|\xi_n^{\mu_n-1}|\right] \leqq 2H\cdot\frac{3e^{\omega\cdot t_0}}{2}\left[|\xi_{10}|+|\xi_{10}'|+\cdots+|\xi_{n0}^{\mu_n-1}|\right].$$

Es sei ω den angegebenen Bedingungen gemäß von vornherein fest gewählt. Die Variationsgleichungen (29.) besitzen dann die Stabilitätskoeffizienten

$$(52.)\qquad \frac{\omega}{6H},\ 6H.$$

Unsere Behauptung bezüglich der Notwendigkeit eines positiven Index ist damit bewiesen.

---

*) Der Index 0 deutet auf $t = t_0$ hin.

III. Ein Hilfssatz. Die Existenz eines positiven Index als hinreichende Bedingung.

§ 10.

In diesem und dem folgenden Paragraphen stellen wir einige vorbereitende Bemerkungen zusammen.

Zunächst mag darauf hingewiesen werden, daß für unsere Zwecke eine jetzt ungebräuchliche Definition des bestimmten Integrals geeignet ist. Wir führen demgemäß ein besonderes Zeichen ein. Es möge $f(x)$ in dem Intervall von α bis β (α, β sind eingeschlossen) vorliegen. Falls $\alpha \neq \beta$ ist, existiere für das genannte Intervall eine solche Funktion $g(x)$, daß $g'(x) = f(x)$ gilt. Dann setzen wir

(53.) $I_a^\beta f(x)\,dx = g(\beta) - g(\alpha)$, wenn $\alpha \neq \beta$, $I_a^\beta f(x)\,dx = 0$, wenn $\alpha = \beta$.

Wir erwähnen, daß, falls

(54.) $$I_a^\beta f(x)\,dx \quad \text{und} \quad I_a^\beta \varphi(x)\,dx$$

existieren und $|f(x)| \overline{\overline{<}} \varphi(x)$ ist, die Beziehung

(55.) $$|I_a^\beta f(x)\,dx| \overline{\overline{<}} |I_a^\beta \varphi(x)\,dx|$$

gilt. Außerdem führen wir folgenden Satz an:

Es möge $I_a^\beta f(x)\,dx$ existieren, und es sei $\alpha \neq \beta$. Ferner sei $\varphi(x)$ für alle x von α inkl. bis β inkl. gegeben und mit stetigem Differentialquotienten $\varphi'(x)$ versehen. Dann existiert

(56.) $$I_a^\beta f(x) \cdot \varphi(x)\,dx.$$

Zum Beweise brauchen wir nur zu bemerken, daß

(57.) $$\frac{d}{dx}\left[\varphi(x) I_a^x f(x)\,dx - I_a^x \frac{d\varphi}{dx}\,(I_a^x f(x)\,dx)\,dx\right] = f(x) \cdot \varphi(x)$$

gilt. Es existiert also

(58.) $$I_a^\beta f(x) \cdot \varphi(x)\,dx = \varphi(\beta) I_a^\beta f(x)\,dx - I_a^\beta \frac{d\varphi}{dx}\,(I_a^x f(x)\,dx)\,dx.$$

§ 11.

Es mögen die linearen Differentialgleichungen

(59.) $$\frac{dx_i}{dt} - \sum_{\mu=1}^{n} a_{i\mu} x_\mu = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

vorliegen. Hierbei seien die $a_{i\mu}$ für ein zusammenhängendes t-Gebiet T*) stetige Funktionen von t. Ist τ irgendein t-Wert des Gebietes T und μ

*) T soll mehr als einen Wert enthalten.

eine der Zahlen $1, 2, \dots n$, so bezeichnen wir mit

$$(60.) \qquad x_{1\mu}^{\tau}(t),\ x_{2\mu}^{\tau}(t), \dots x_{n\mu}^{\tau}(t)$$

eine Lösung von (59.), welche durch folgende Bedingung gekennzeichnet wird: $x_{i\mu}^{\tau}(\tau)$ ist gleich Null oder Eins, je nachdem $i \neq \mu$ oder $i = \mu$ gilt. Setzt man unter Beibehaltung von τ an Stelle von μ der Reihe nach $1, 2, \dots n$, so gewinnt man n voneinander unabhängige Lösungen. Diese Lösungen, welche bekanntlich schon in der elementaren Theorie der linearen Differentialgleichungen vorkommen, wollen wir *die für $t = \tau$ normierten Lösungen* von (59.) nennen. Sind

$$(61.) \qquad \begin{cases} x_1', & x_2', & \dots & x_n', \\ x_1'', & x_2'', & \dots & x_n'', \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1^n, & x_2^n, & \dots & x_n^n \end{cases}$$

irgendwelche n unabhängigen Lösungen von (59.), ist $\Delta(t)$ die Determinante der Elemente (61.) und $\Delta_i^{\mu}(t)$ die Unterdeterminante des Gliedes x_i^{μ}, so gilt

$$(62.) \qquad x_{i\nu}^{\tau}(t) = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\Delta_{\nu}^{\mu}(\tau)}{\Delta(\tau)} x_i^{\mu}(t).$$

Besitzen die Differentialgleichungen (59.) die Stabilitätskoeffizienten $\frac{\alpha}{k}$ und k, so haben wir für alle Lösungen von (59.)

$$(63.) \qquad \sum_{i=1}^{n} |x_i(t_2)| \overline{\overline{<}} k e^{-\alpha(t_2 - t_1)} \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i(t_1)|,$$

sobald t_1 und t_2 dem Gebiet T angehören und $t_2 \overline{\overline{>}} t_1$ ist. Es gilt folglich auch

$$(64.) \qquad \sum_{i=1}^{n} |x_{i\mu}^{\tau}(t)| \overline{\overline{<}} k \cdot e^{-\alpha(t-\tau)}, \qquad (\mu = 1, 2, \dots n)$$

sobald τ und t dem Gebiet T angehören und $t \overline{\overline{>}} \tau$ ist. Existieren andererseits derartige Konstanten α, k, daß die zuletzt genannte in (64.) zum Ausdruck kommende Aussage gilt, so besitzen die Differentialgleichungen (59.) die Stabilitätskoeffizienten $\frac{\alpha}{k}, k$. Wir haben nämlich für jede Lösung $x_1, x_2, \dots x_n$

$$(65.) \qquad x_{\varrho}(t) = x_1(\tau) x_{\varrho 1}^{\tau}(t) + x_2(\tau) x_{\varrho 2}^{\tau}(t) + \dots + x_n(\tau) x_{\varrho n}^{\tau}(t). \qquad (\varrho = 1, 2, \dots n)$$

Hieraus folgt

$$(66.)\quad \sum_{i=1}^{n}|x_i(t)| < |x_1(\tau)|\sum_{i=1}^{n}|x_{i1}^{\tau}(t)| + |x_2(\tau)|\sum_{i=1}^{n}|x_{i2}^{\tau}(t)| + \cdots + |x_n(\tau)|\sum_{i=1}^{n}|x_{in}^{\tau}(t)|$$
$$\leqq k\cdot e^{-\alpha(t-\tau)}\cdot\sum_{i=1}^{n}|x_i(\tau)|.$$

Unsere Behauptung ist also richtig.

Indem wir die zu Anfang dieses Paragraphen eingeführten Bezeichnungen beibehalten, nehmen wir an, daß für das Gebiet T n Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ vorliegen, welche mit ersten Differentialquotienten nach t versehen sind. Es mögen dann folgende Bezeichnungen eingeführt werden

$$(67.)\quad \frac{dy_i}{dt} - \sum_{\mu=1}^{n} a_{i\mu}y_\mu = \xi_i. \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

Sind dann s und t t-Werte des Intervalles T, so erhält man durch Transformationen, welche aus der elementaren Theorie der linearen Differentialgleichungen bekannt sind,

$$(68.)\quad y_i(t) = y_1(s)x_{i1}^{s}(t) + \cdots + y_n(s)x_{in}^{s}(t) + I_s^t d\alpha[\xi_1(\alpha)x_{i1}^{\alpha}(t) + \cdots + \xi_n(\alpha)x_{in}^{\alpha}(t)]. \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

§ 12.

Wir gehen nun zum Beweise eines Hilfssatzes über, welcher einerseits bei den Betrachtungen dieser Arbeit vorkommt, andererseits aber auch bei denjenigen Untersuchungen von Wert ist, die in der Einleitung angedeutet sind, hier aber nicht durchgeführt werden. Es ist der folgende Satz:

Für alle t-Werte von t_1 inkl. bis t_2 inkl. $(t_1 \neq t_2)$ mögen solche stetigen Funktionen $a_{i\mu}(t)$ $(i, \mu = 1, 2, \ldots n)$ vorliegen, daß die Hilfsgleichungen

$$(69.)\quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{i\mu}\cdot x_\mu. \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

für das genannte t-Intervall die Stabilitätskoeffizienten g, k besitzen, von denen der Hauptkoeffizient g positiv sei. Ferner mögen $y_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ Funktionen sein, die für das genannte t-Intervall vorliegen und dort mit ersten Differentialquotienten versehen sind. Bezüglich der y-Funktionen machen wir ferner die Annahme, daß im genannten t-Intervall

$$(70.)\quad \left|\frac{dy_i}{dt} - \sum_{\mu=1}^{n} a_{i\mu}y_\mu\right| \leqq a_i + b_i\sum_{\mu=1}^{n}|y_\mu|$$

gilt. Hierbei bedeuten die a_i, b_i Konstanten, welche die Bedingung

(71.) $$0 \leqq b_1 + b_2 + \cdots + b_n < g$$

erfüllen. Wir bezeichnen

(72.) $$\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu = a, \qquad \sum_{\mu=1}^{n} b_\mu = b.$$

Ist dann s irgendein t-Wert des zugrunde gelegten Intervalls, so gilt, wie wir behaupten, für alle $t \geqq s$

(73.) $$\sum_{\mu=1}^{n} |y_\mu(t)| \leqq \frac{a}{g-b} + e^{-k(g-b)(t-s)}\left[k \sum_{\mu=1}^{n} |y_\mu(s)| - \frac{a}{g-b}\right]$$

und folglich auch)*

(74.) $$\sum_{\mu=1}^{n} |y_\mu(t)| \leqq \overline{\frac{a}{g-b}, \quad k \cdot \sum_{\mu=1}^{n} |y_\mu(s)|}.$$

Zum Beweise benutzen wir, wie vorher bemerkt werden möge, ein Verfahren, welches von *E. Cotton***) in mehreren Arbeiten angewandt worden ist.

Die Bezeichnungen (60.) und (67.) des § 11 behalten wir bei und setzen noch

(75.) $$\sigma(t) = \sum_{\mu=1}^{n} |y_\mu(t)|.$$

Sind τ und $t \geqq \tau$ irgendwelche t-Werte des zugrunde gelegten Intervalls, so gilt nach unseren Vorauszetzungen

(76.) $$\sum_{i=1}^{n} |x_{i\mu}^{\tau}(t)| \leqq k \cdot e^{-gk(t-\tau)}. \qquad (\mu = 1, 2, \ldots n)$$

Auf Grund von (70.) und (75.) erhalten wir unter Berücksichtigung der bezüglich (56.) in § 10 gemachten Bemerkung, wenn s und $t \geqq s$ t-Werte des vorliegenden Intervalls sind,

(77.) $$\sum_{i=1}^{n} |I_s^t d\alpha \cdot \xi_\mu(\alpha) \cdot x_{i\mu}^{\alpha}(t)| \leqq \sum_{i=1}^{n} I_s^t d\alpha\,(a_\mu + b_\mu \sigma(\alpha)) \cdot |x_{i\mu}^{\alpha}(t)|$$
$$\leqq I_s^t d\alpha\,(a_\mu + b_\mu \sigma(\alpha)) \cdot k \cdot e^{-gk(t-\alpha)}.$$

Die Anwendung der Gleichungen (68.) führt dann leicht zu der Beziehung

(78.) $$\sigma(t) \leqq \sigma(s) \cdot k \cdot e^{-gk(t-s)} + I_s^t d\alpha\,(a + b\sigma(\alpha)) \cdot k \cdot e^{-gk(t-\alpha)},$$

welche für $t \geqq s$ gilt.

Wir führen nun diejenige Lösung von

(79.) $$\frac{du}{dt} + gk \cdot u - k(a + bu) = 0$$

---

*) Wir bezeichnen mit $\overline{p, q}$ die größere der Zahlen p, q falls $p \neq q$. Wenn $p = q$, so setzen wir $\overline{p, q} = p = q$.

**) s. z. B. *E. Cotton*, Équations différentielles et équations intégrales, Bulletin de la Soc. Math. de France, t. XXXVIII.

ein, welche für $t = s$ gleich $k \cdot \sigma(s) + \varepsilon$ wird, wobei ε eine beliebige positive Konstante bedeutet. Diese Lösung ist

$$(80.) \qquad u(t) = \frac{a}{g-b} + e^{-k(g-b)(t-s)}\left[k\sigma(s) + \varepsilon - \frac{a}{g-b}\right].$$

Für dieselbe gilt

$$(81.) \qquad u(t) = u(s)\, e^{-gk(t-s)} + I_s^t d\alpha k[a + bu(\alpha)] e^{-gk(t-\alpha)}.$$

Dies erhält man auf Grund von (68.) und kann man verifizieren.

Aus (78.) und (81.) ergibt sich nun für $t \gtreqless s$

$$(82.) \quad u(t) - \sigma(t) \gtreqless e^{-gk(t-s)}[u(s) - k\sigma(s)] + I_s^t d\alpha k \cdot b \cdot e^{-gk(t-\alpha)}[u(\alpha) - \sigma(\alpha)].$$

Für $t = s$ ist $u(t) - \sigma(t) = k\sigma(s) + \varepsilon - \sigma(s) > 0$, und die Ungleichung $u(t) - \sigma(t) > 0$ gilt auch für ein gewisses Intervall über s hinaus, wenn die entsprechenden t-Werte überhaupt zulässig sind. Wäre nun für ein $t > s$ $u(t) - \sigma(t) \leqq 0$, so müßte es einen solchen Wert $\tau > s$ geben, daß

$$(83.) \qquad u(\tau) - \sigma(\tau) = 0$$

gilt, während für $s \leqq t < \tau$ $u(t) - \sigma(t) > 0$ ist. Wendet man nun (82.) auf den Wert $t = \tau$ an, so ergibt sich $u(\tau) - \sigma(\tau) > 0$, so daß ein Widerspruch auftritt. Somit haben wir auch für $t > s$ $u(t) - \sigma(t) > 0$. Beachtet man die bei der Wahl von ε herrschende Willkür, so erhält man offenbar für $t \gtreqless s$

$$(84.) \qquad \sigma(t) \leqq \frac{a}{g-b} + e^{-k(g-b)(t-s)}\left[k\sigma(s) - \frac{a}{g-b}\right].$$

Hieraus folgt für $t \gtreqless s$

$$(85.) \qquad \sigma(t) \leqq \overline{\frac{a}{g-b},\ k \cdot \sigma(s)}.$$

Damit haben wir unser Theorem bewiesen.

Sind die Konstanten a_i gleich Null, so bleibt der Satz (73.) bestehen, auch wenn man nicht $g > 0$, $g > b$ voraussetzt. Man erkennt dies leicht, wenn man $z_\mu = e^{-p(t-s)} \cdot y_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots n)$ setzt, $p > 0$ genügend groß wählt und den gefundenen Satz auf die z_μ anwendet.

§ 13.

In diesem Paragraphen führen wir den Beweis unseres Haupttheorems zu Ende, indem wir zeigen, daß in der Tat die Existenz eines positiven Index eine hinreichende Bedingung darstellt. Wir setzen demgemäß voraus, daß der Index der Gleichungen (19.) einen positiven Wert hat. Dann gibt es für die Gleichungen (19.) auch ein Paar von Stabilitäts-

koeffizienten g, k, von denen der Hauptkoeffizient g positiv ist. Wir wählen die positiven Größen $b_1, b_2, \dots b_n$ so, daß

$$0 \leqq b_1 + b_2 + \cdots b_n < g \tag{86.}$$

ist, und darauf noch ein solches $p > 0$, daß folgendes gilt. Sind $t, \underline{x}_1, \underline{x}_1', \dots \underline{x}_n^{\mu_n - 1}$ und $t, \underline{\underline{x}}_1, \underline{\underline{x}}_1', \dots \underline{\underline{x}}_n^{\mu_n - 1}$ Stellen des Gebietes G (siehe § 5) und bildet man eine der partiellen Ableitungen von X_i nach x_1, x_1' usw. für die genannten Stellen, so unterscheiden sich die beiden gefundenen Werte nicht mehr als um b_i, wenn

$$\sum_{\varrho=1}^{n} (|\underline{\underline{x}}_\varrho - \underline{x}_\varrho| + |\underline{\underline{x}}_\varrho' - \underline{x}_\varrho'| + \cdots + |\underline{\underline{x}}_\varrho^{\mu_\varrho - 1} - \underline{x}_\varrho^{\mu_\varrho - 1}|) \leqq p \tag{87.}$$

ist; und zwar gilt dies für alle $i = 1, 2, \dots n$.

Nun stellen wir uns vor, daß für ein mit $t = t_0$ beginnendes nicht punktförmiges t-Intervall τ eine Lösung der Differentialungleichungen (18.) und eine Lösung der Differentialgleichungen (19.) vorliegen. Die auf die Lösung von (18.) bezüglichen $x_1, x_1', \dots x_n^{\mu_n - 1}$ wollen wir mit $\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_1', \dots \bar{\bar{x}}_n^{\mu_n - 1}$ bezeichnen. $\bar{x}_1, \bar{x}_1', \dots \bar{x}_n^{\mu_n - 1}$ mögen sich analog auf (19.) beziehen. Wir setzen voraus, daß

$$\varepsilon < \frac{g - b}{n} \cdot p \tag{88.}$$

ist, indem wir der Kürze wegen $b = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ schreiben. Ferner nehmen wir an, daß

$$\sum_{i=1}^{n} (|\bar{\bar{x}}_{i0} - \bar{x}_{i0}| + |\bar{\bar{x}}_{i0}' - \bar{x}_{i0}'| + \cdots + |\bar{\bar{x}}_{i0}^{\mu_i - 1} - \bar{x}_{i0}^{\mu_i - 1}|) < \frac{p}{k} \tag{89.}$$

gilt, wobei der Index 0 auf $t = t_0$ hindeutet. Es mögen noch folgende Bezeichnungen benutzt werden

$$\left\{ \begin{array}{l} v_i = \bar{\bar{x}}_i - \bar{x}_i, \; v_i' = \bar{\bar{x}}_i' - \bar{x}_i', \dots v_i^{\mu_i - 1} = \bar{\bar{x}}_i^{\mu_i - 1} - \bar{x}_i^{\mu_i - 1}, \qquad (i = 1, 2, \dots n) \\ \sigma = \sum_{i=1}^{n} (|v_i| + |v_i'| + \cdots |v_i^{\mu_i - 1}|). \end{array} \right. \tag{90.}$$

Es gibt offenbar ein mit $t = t_0$ beginnendes nicht punktförmiges t-Intervall θ, in welchem $\sigma \leqq p$ gilt. In einem solchen Intervall θ haben wir

$$\begin{aligned} \frac{dv_i^{\mu_i - 1}}{dt} - [X_i(t, \bar{x}_1 + v_1, \bar{x}_1' + v_1', \dots \bar{x}_n^{\mu_n - 1} + v_n^{\mu_n - 1}) \\ - X_i(t, \bar{x}_1, \bar{x}_1', \dots \bar{x}_n^{\mu_n - 1})] = \eta_i \qquad (i = 1, 2, \dots n) \end{aligned} \tag{91.}$$

wobei $|\eta_i| \leqq \varepsilon$ ist. Hieraus folgt für das Intervall θ

$$\frac{dv_i^{\mu_i-1}}{dt} - \frac{\overline{\partial X_i}}{\partial x_1} v_1 - \frac{\overline{\partial X_i}}{\partial x_1'} v_1' - \cdots - \frac{\overline{\partial X_i}}{\partial x_n^{\mu_n-1}} v_n^{\mu_n-1}$$

$$(92.) \quad - \left[\left(\left\{\frac{\partial X_i}{\partial x_1}\right\} - \frac{\overline{\partial X_i}}{\partial x_1}\right)v_1 + \left(\left\{\frac{\partial X_i}{\partial x_1'}\right\} - \frac{\overline{\partial X_i}}{\partial x_1'}\right)v_1' + \cdots + \left(\left\{\frac{\partial X_i}{\partial x_n^{\mu_n-1}}\right\} - \frac{\overline{\partial X_i}}{\partial x_n^{\mu_n-1}}\right)v_n^{\mu_n-1}\right] = \eta_i. \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

Hierbei deutet ein Strich über einer Ableitung von X_i an, daß die Größe für $x_1 = \bar{x}_1, x_1' = \bar{x}_1', \ldots x_n^{\mu_n-1} = \bar{x}_n^{\mu_n-1}$ zu bilden ist. Ist aber eine solche Ableitung zwischen Klammern gesetzt, so bedeutet dies, daß diese Ableitung für $x_1 = \bar{x}_1 + \vartheta_i v_1$, $x_1' = \bar{x}_1' + \vartheta_i v_1', \ldots x_n^{\mu_n-1} = \bar{x}_n^{\mu_n-1} + \vartheta_i v_n^{\mu_n-1}$ zu bilden ist, wobei ϑ_i dem Intervall von 0 bis 1 angehört. Nun ist $|\vartheta_i v_1| + |\vartheta_i v_1'| + \cdots + |\vartheta_i v_n^{\mu_n-1}| = \vartheta_i \sigma \overline{\overline{<}} p$. Folglich ist die in (92.) links zwischen eckigen Klammern stehende Größe dem absoluten Betrage nach $\overline{\overline{<}} b_i \cdot \sigma$ (vgl. das hinsichtlich (87.) Gesagte). Wir gelangen so zu folgenden Ungleichungen für das Intervall θ

$$(93.) \quad \begin{cases} \left| \dfrac{dv_i^{\mu_i-1}}{dt} - \dfrac{\overline{\partial X_i}}{\partial x_1} \cdot v_1 - \dfrac{\overline{\partial X_i}}{\partial x_1'} \cdot v_1' - \cdots - \dfrac{\overline{\partial X_i}}{\partial x_n^{\mu_n-1}} \cdot v_n^{\mu_n-1} \right| \overline{\overline{<}} b_i \sigma + \varepsilon, \\ \left| \dfrac{dv_i^{\mu_i-2}}{dt} - v_i^{\mu_i-1} \right| = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\

vall τ $\sigma \overline{\overline{<}} p$ gelten muß. Andernfalls müßte ein solcher dem Intervall τ angehörender t-Wert $t' > t_0$ existieren, daß für $t = t'$ $\sigma = p$, für $t_0 \overline{\overline{<}} t < t'$ $\sigma < p$ gilt. Das Intervall $t_0 \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} t'$ könnte dann die Rolle von θ spielen, und es müßte daher für $t = t'$ die Ungleichung (95.) gelten. Hieraus würde nach dem in Anschluß an (95.) Gesagten für $t = t'$ $\sigma < p$ folgen. Es würde sich daher ein Widerspruch ergeben.

Nach dem Ausgeführten kann das ganze Intervall τ die Rolle von θ spielen. Es gilt daher (95.) für das ganze Intervall τ. *Damit haben wir nicht nur das zu Anfang dieses Paragraphen gesteckte Ziel erreicht, sondern auch die in der Einleitung in δ zum Ausdruck kommende Behauptung bewiesen.*

IV. Ein Beispiel von Differentialgleichungen mit positivem Index.

§ 14.

Nachdem wir den Hauptgegenstand dieser Arbeit, den Beweis des in der Einleitung angekündigten Theorems, erledigt haben, führen wir noch ein Beispiel von Differentialgleichungen mit positivem Index an. Das genannte Beispiel umfaßt viele Fälle von Interesse. In diesem Paragraphen machen wir einige vorbereitende Bemerkungen über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Es möge ein System von Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{i\mu} x_\mu \qquad (i=1, 2, \ldots n) \tag{96.}$$

vorliegen, wobei die a-Koeffizienten Konstanten sind. *Bezüglich dieser letzteren machen wir die Annahme, daß die Gleichung*

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\omega & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\omega & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+\omega \end{vmatrix} = 0 \tag{97.}$$

nur Wurzeln mit positivem reellen Teil hat. Es existiert dann bekanntlich eine solche definit positive quadratische Form Π der $x_1, x_2, \ldots x_n$, daß

$$\frac{d\Pi}{dt} \overline{\overline{<}} -h \cdot \Pi \tag{98.}$$

gilt, wobei h eine positive Konstante bedeutet. *Hieraus folgt, daß für das System* (96.) *Stabilitätskoeffizienten g, k existieren, von denen der Hauptkoeffizient g positiv ist.*

Wir betrachten nun das System

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} b_{i\mu} y_\mu . \qquad (i=1,2,\dots n) \tag{99.}$$

Hier sind die b-Koeffizienten ebenfalls Konstanten. Wir bezeichnen den größten unter den $|b_{i\mu} - a_{i\mu}|$ $(\mu = 1, 2, \dots n)$ vorkommenden Wert mit e_i *und setzen*

$$e = e_1 + e_2 + \cdots e_n < g \tag{100.}$$

voraus. Dann besitzt, wie wir zeigen werden, das System (99.) *die Stabilitätskoeffizienten* $g - e$, k.

Zu dem genannten Zweck bemerken wir zunächst, daß für jede Lösung von (99.)

$$\left| \frac{dy_i}{dt} - \sum_{\mu=1}^{n} a_{i\mu} y_\mu \right| \leqq e_i \sum_{\mu=1}^{n} | y_\mu | \qquad (i=1,2\dots n) \tag{101.}$$

gilt. Die Anwendung des Hilfssatzes in § 12 ergibt dann gemäß (73.)

$$\sum_{\mu=1}^{n} | y_\mu(t) | \leqq e^{-k(g-e)(t-t_0)} \cdot k \cdot \sum_{\mu=1}^{n} | y_\mu(t_0) | , \tag{102.}$$

wobei t_0 beliebig gewählt ist und t nur der Bedingung $t \geqq t_0$ genügt. *Damit ist die Richtigkeit unserer Bemerkung erwiesen.*

Endlich wollen wir eine *Schar* von Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} c_{i\mu} z_\mu \qquad (i=1,2\dots n) \tag{103.}$$

betrachten, wobei n für alle Systeme der Schar denselben Wert hat und die $c_{i\mu}$ Konstanten sind, welche für die verschiedenen Systeme verschieden sein können, aber zwischen allen Systemen gemeinsamen endlichen Grenzen liegen. Außerdem werde vorausgesetzt, daß die reellen Teile der Wurzeln von

$$\begin{vmatrix} c_{11}+\omega & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}+\omega & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}+\omega \end{vmatrix} = 0 \tag{104.}$$

gleich oder größer als eine gewisse positive allen Systemen gemeinsame Zahl q sind. *Für die genannte Schar von Systemen von Differentialgleichungen existiert dann, wie wir beweisen wollen, ein Paar von Stabilitätskoeffizienten* g, k, *von denen der Hauptkoeffizient* g *größer als Null ist.*

Zum Beweise nehmen wir versuchsweise an, der behauptete Satz sei nicht richtig. Wie man dann auch die positive Zahl p wählen möge,

stets gibt es ein p entsprechendes System der Schar, welches *keine* Stabilitätskoeffizienten $\gamma, \varkappa$ besitzt, die den Bedingungen

$$(105.) \qquad \varkappa \lessgtr p \qquad \gamma \cdot \varkappa \gtrless \frac{1}{p}$$

genügen. Andernfalls wäre nämlich $\frac{1}{p^2}, p$ ein Paar von Stabilitätskoeffizienten der Schar, und der Hauptkoeffizient $\frac{1}{p^2}$ wäre positiv. Wir erteilen nun p die positiven Werte $p_1, p_2, p_3, \ldots$, welche nach ∞ konvergieren mögen. $(1), (2), (3), \ldots$ seien Systeme der Schar, welche $p_1, p_2, p_3, \ldots$ in der eben genannten Weise entsprechen. Die c-Koeffizienten der Systeme $(1), (2), (3), \ldots$ besitzen eine Häufungsstelle, welcher das Tableau

$$(106.) \qquad \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \cdots \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \cdots \beta_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} \cdots \beta_{nn} \end{vmatrix}$$

entsprechen möge. Wir bilden dann das System von Differentialgleichungen

$$(107.) \qquad \frac{du_i}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} \beta_{i\mu} u_\mu. \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

Die Gleichung

$$(107^a.) \qquad \begin{vmatrix} \beta_{11}+\omega & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22}+\omega & \cdots & \beta_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn}+\omega \end{vmatrix} = 0$$

besitzt offenbar nur Wurzeln, deren reeller Teil $\gtrless q$ ist (vgl. (104.)). Die Differentialgleichungen (107.) besitzen daher nach dem zu Anfang dieses Paragraphen angeführten Satze Stabilitätskoeffizienten G, K mit positivem Hauptkoeffizienten G.

Wir wählen nun die positiven Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ so aus, daß

$$(108.) \qquad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n < G$$

gilt. Indem wir den in diesem Paragraphen im Anschluß an (99.) bewiesenen Satz benutzen, erkennen wir leicht, daß unter den Systemen $(1), (2), (3), \ldots$ unendlich viele existieren, welche die Stabilitätskoeffizienten $G - \varepsilon, K$ besitzen. Unter den eben genannten unendlich vielen Systemen gibt es sicher ein solches, welches einem p-Wert p_σ entspricht, für welchen

$$(109.) \qquad p_\sigma \gtrless K, \quad \frac{1}{p_\sigma} \lessgtr (G-\varepsilon)K$$

gilt. Dies widerspricht jedoch dem Vorhergehenden (vgl. die Einführung der $p_1, p_2, p_3, \ldots$). Unser Satz ist somit bewiesen.

Sind die Zahlen n und q sowie die Grenzen der c-Koeffizienten gegeben, so bezieht sich unser Satz auch auf die Gesamtheit der diesen Daten entsprechenden Differentialgleichungen. Somit kann man ein Paar von Stabilitätskoeffizienten mit positivem Hauptkoeffizienten als den genannten Daten zugeordnet betrachten.

§ 15.

Wir betrachten nun folgendes System von Differentialgleichungen

$$(110.)\qquad \frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + \varphi_i(t, x_1, x_2 \cdots x_n). \quad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots n)}$$

Die a-Koeffizienten sind stetige Funktionen von t in einem zusammenhängenden, nicht punktförmigen t-Gebiet θ. In diesem Gebiet θ mögen die genannten Koeffizienten zwischen festen endlichen Grenzen bleiben. Die φ-Funktionen sind für diejenigen $t, x_1, \ldots x_n$ gegeben, von denen t dem Gebiet θ angehört, während $x_1, x_2, \ldots x_n$ aus einem gewissen nur innere Punkte enthaltenden Gebiet stammen. Die φ seien stetig und mit stetigen Differentialquotienten erster Ordnung nach den x versehen.

Wir machen nun noch einige Voraussetzungen. Erstens möge die Gleichung

$$(111.)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}+\omega & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\omega & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+\omega \end{vmatrix} = 0$$

stets nur Wurzeln haben, deren reeller Teil nicht kleiner als eine von vornherein gegebene positive Konstante ist. Hieraus folgt nach dem vorhergehenden Paragraphen, daß die Schar von Systemen von Differentialgleichungen der Form

$$(112.)\qquad \frac{dy_i}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{i\mu}(\vartheta)\cdot y_\mu \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots n)}$$

Stabilitätskoeffizienten g, k besitzt, von denen der Hauptkoeffizient g positiv ist. Hierbei bedeutet ϑ irgendeinen t-Wert des Gebietes θ. Zweitens werde angenommen, daß

$$(113.)\qquad |a_{i\mu}(t'') - a_{i\mu}(t')| \leqq c_i \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots n,\ \mu=1,2,\ldots n)}$$

ist, falls $|t''-t'| \leqq T$ gilt. Hierbei bedeuten T und $c_1, c_2, \ldots c_n$ von vornherein gegebene Konstanten, und es sei $T>0$. Ferner werde

$$\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\mu}\right| \leqq h_i \qquad (i=1,2,\ldots n;\ \mu=1,2,\ldots n) \tag{114.}$$

vorausgesetzt, wobei $h_1, h_2, \ldots h_n$ von vornherein vorliegende Konstanten bedeuten.

Endlich werde

$$\gamma = g - \sum_{i=1}^{n}(h_i + c_i) - \frac{\lg k}{2kT} \tag{115.}$$

gesetzt und $\gamma > 0$ angenommen.

Dann sind γ, k Stabilitätskoeffizienten der Differentialgleichungen (110.) *und $\gamma > 0$. Die Gleichungen* (110.) *haben daher auch einen positiven Index.*

Um diese Behauptung zu beweisen, schicken wir eine Bemerkung voraus. Es liege ein System positiver Funktionen vor, von denen jede für ein entsprechendes zusammenhängendes, nicht punktförmiges t-Gebiet definiert ist. Ist f irgendeine dieser Funktionen und sind t'', t' Werte aus dem entsprechenden t-Gebiet, welche der Bedingung $0 \leqq t''-t' \leqq s$ genügen, so gilt, wie wir annehmen,

$$f(t'') \leqq K e^{-GK(t''-t')} f(t'). \tag{116.}$$

Dabei bedeutet s eine von vornherein vorliegende positive Konstante. *Dann besitzt, wie wir zeigen wollen, das Funktionensystem die Stabilitätskoeffizienten*

$$G - \frac{\lg K}{K \cdot s},\ K. \tag{117.}$$

Es sei f eine Funktion des Systems und t_1 sowie t_2 $(t_2 > t_1)$ seien Werte aus dem entsprechenden t-Gebiet. Wir bestimmen die positive ganze Zahl ν in der Weise, daß

$$(\nu-1)\,s < t_2 - t_1 \leqq \nu \cdot s \tag{118.}$$

gilt. Ferner bezeichnen wir

$$\frac{t_2-t_1}{\nu} = \tau. \tag{119.}$$

Offenbar ist $\tau \leqq s$. Wir haben

$$\begin{aligned}\frac{f(t_2)}{f(t_1)} &= \frac{f(t_1+\tau)}{f(t_1)} \cdot \frac{f(t_1+2\tau)}{f(t_1+\tau)} \cdots \frac{f(t_1+\nu\tau)}{f(t_1+(\nu-1)\tau)} \\ &\leqq K^\nu e^{-G\cdot K\cdot \nu\cdot \tau} = K e^{(\nu-1)\lg K} \cdot e^{-G\cdot K\cdot \nu\cdot \tau}.\end{aligned} \tag{120.}$$

Nun ist

$$(\nu-1)\lg K \leqq \frac{t_2-t_1}{s}\lg K, \qquad \nu\cdot\tau = t_2 - t_1. \tag{121.}$$

Folglich ergibt sich

$$(122.) \qquad f(t_2) \leqq f(t_1) \cdot K e^{-\left[G - \frac{\lg K}{K \cdot s}\right] \cdot K (t_2 - t_1)}.$$

Dieses Resultat behält auch für $t_1 = t_2$ seine Gültigkeit. Damit ist die Richtigkeit unserer Bemerkung bewiesen.

Wir bilden nun die Variationsgleichungen von (110.), d. h. die Gleichungen

$$(123.) \qquad \frac{du_i}{dt} = a_{i1} u_1 + a_{i2} u_2 + \cdots a_{in} u_n + \sum_{\mu=1}^{n} \left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\mu}\right\} \cdot u_\mu . \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

Die Klammern auf der rechten Seite weisen darauf hin, daß die betreffende Größe für eine Lösung von (110.) gebildet ist.

Es möge irgendeine Lösung von (123.) für ein zusammenhängendes nicht punktförmiges t-Gebiet vorliegen. t_1 und t_2 mögen diesem t-Gebiet angehören und den Bedingungen $t_1 < t_2$, $t_2 - t_1 \leqq 2T$ genügen. Indem wir $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ mit ϑ bezeichnen, haben wir für die genannte Lösung

$$(124.) \qquad \begin{cases} \dfrac{du_i}{dt} = a_{i1}(\vartheta) \cdot u_1 + \cdots + a_{in}(\vartheta) u_n + \\ \left[(a_{i1}(t) - a_{i1}(\vartheta)) u_1 + \cdots + (a_{in}(t) - a_{in}(\vartheta)) u_n + \sum_{\mu=1}^{n} \left\{\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_\mu}\right\} \cdot u_\mu\right]. \end{cases} \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

Im Gebiete von $t = t_1$ bis $t = t_2$ gilt $|t - \vartheta| \leqq \frac{1}{2}|t_2 - t_1| \leqq T$ und somit nach der Voraussetzung

$$(125.) \qquad |a_{i1}(t) - a_{i1}(\vartheta)|, \ldots |a_{in}(t) - a_{in}(\vartheta)| \leqq c_i . \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

Folglich ist in dem eben genannten t-Gebiet der Absolutwert der in (124.) in eckigen Klammern stehenden Größe

$$(126.) \qquad \leqq (c_i + h_i) \sum_{\mu=1}^{n} |u_\mu| .$$

Die Anwendung des Hilfssatzes aus § 12 ergibt nun

$$(127.) \qquad \sum_{\mu=1}^{n} |u_\mu(t_2)| \leqq k \sum_{\mu=1}^{n} |u_\mu(t_1)| \cdot e^{-k\left(g - \sum_{i=1}^{n} (c_i + h_i)\right)(t_2 - t_1)} .$$

Fassen wir nun die Summe $|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|$ für alle überhaupt vorkommenden nicht trivialen Lösungen der Variationsgleichungen ins Auge, so erkennen wir mit Hilfe der vorausgeschickten Bemerkung dieses Paragraphen, daß das so gewonnene System von positiven Funktionen die Stabilitätskoeffizienten γ, k besitzt. Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Es möge schließlich noch besonders bemerkt werden, daß in den vorhergehenden Untersuchungen nur reelle endliche Größen benutzt worden sind, sofern von Stellen, die keinen Zweifel gestatten, abgesehen wird. Diese Bemerkung bezieht sich auch auf die vorkommenden Differentialquotienten.

Extension of the criteria of *Wieferich* and *Mirimanoff* in connection with *Fermat*'s last theorem.

By M. *H. S. Vandiver* of Philadelphia.

If

$$q(a) = \frac{a^{p-1}-1}{p}$$

and

$$x^p + y^p + z^p = 0 \tag{1.}$$

is satisfied in integers prime to each other and to the odd prime p, then $q(2) \equiv 0 \pmod p$ and $q(3) \equiv 0 \pmod p$, which are, respectively, the criteria of *Wieferich* and *Mirimanoff*.

In the same connection, I shall obtain in this paper some criteria, which, when compared with certain results due to *Mirimanoff*, yield the conditions:

$$\begin{cases} q(5) \equiv 0 \pmod p \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\left[\frac{p}{5}\right]} \equiv 0 \pmod p. \end{cases} \tag{2.}$$

For the solution of (1.) in integers prime to p, we have that each of the six ratios

$$-\frac{x}{y}, -\frac{y}{x}, -\frac{y}{z}, -\frac{z}{y}, -\frac{x}{z}, -\frac{z}{x} \tag{3.}$$

satisfies the congruences

$$B_i f_{p-2i}(t) \equiv 0 \pmod p, \qquad \left(i = 1, 2, \ldots \frac{p-3}{2}\right)$$

$$f_k(t) = \sum_{r=1}^{p-1} r^{k-1} t^r, \quad B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \ldots \tag{4.}$$

and also

$$f_{p-1}(t) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{5.}$$

which are the well-known *Kummer* Criteria.

It is known that

$$\frac{(1-2^a)\,b_a}{2^{a-1}a} \equiv K_a(1) \pmod{p} \tag{6.}$$

and

$$-2q(2) \equiv K(1) \pmod{p}, \tag{7.}$$

where

$$(-1)^{a-1} B_a = b_{2a} \text{ and } b_{2a+1} = 0,$$

$$K_a(t) = \sum_{n=1}^{\mu} n^{a-1} t^n, \quad K(t) = K_{p-1}(t) \qquad \left(\mu = \frac{p-1}{2}\right).$$

Now

$$\sum_{a=1}^{p-1} K_a(1)\, f_{p-a}(t) = \Sigma r^{a-1} s^{p-a-1} t^s,$$

where r ranges over the integers $1, 2, \ldots \mu$, and s ranges over $1, 2, \ldots p-1$.

The right hand member reduces to

$$\sum_{r,s} \frac{r^{p-1} - s^{p-1}}{r-s} t^s + (p-1)\,K(t) \qquad (r \neq s).$$

Applying (4.) and (5.) in connection with (6.) and (7.) we have, since $t \neq 1$,

$$K(t) \equiv 0 \pmod{p}. \tag{8.}$$

As t assumes all the values in the set (3.) then

$$K\left(\frac{1}{t}\right) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Multiplying this by $2^{p-2} t^{\mu+1}$, there is obtained a relation which may be written

$$M(t) = \sum_{e_1=0}^{\mu-1} (2e_1 + 1)^{p-2} t^{e_1+1} \equiv 0 \pmod{p}. \tag{8a.}$$

Frobenius (Sitzungsberichte d. Akad. Berlin, 1910, p. 827 and p. 843) proved the important relation

$$(mb + l)^a = b_a - a \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha^{i(l+1)} R_{a-1}(\alpha^i)}{(\alpha^i - 1)^a},$$

where $b^a = b_a$, $\alpha = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m}}$, l an arbitrary integer, and

$$(1-x)^{p-1-a} R_a(x) \equiv \sum_{r=1}^{p-1} r^a x^{r-1} \pmod{p} \qquad (0 < a < p),$$

which gives, for $l = 0$ and $1 < m < p$

$$\frac{b_a(1-m^a)}{a} \equiv \sum_{i=1}^{m-1} \frac{f_a(\alpha^i)}{1-\alpha^{ip}} \pmod{p} \tag{9.}$$

for $1 < a < p-1$, and for $a = p-1$ we have

$$(10.) \qquad -q(m) \equiv \sum_{i=1}^{m-1} \frac{f_{p-1}(\alpha^i)}{1-\alpha^{ip}} \pmod p$$

(*Lerch*, C. R. de l'Acad. des sciences, Paris, t. 142, 1906). The main part of the investigation depends upon the development of

$$(11.) \qquad \sum_{n=1}^{p-1} 2^{p-n-1}\binom{p-2}{n-1} f_n(y) f_{p-n}(x) = \sum_{r,s} (r+2s)^{p-2} y^r x^s,$$

where x and y are any rational or algebraic integers, r and s each range over $1, 2, \ldots p-1$. To reduce the right hand member collect the terms in $y^r x^s$ such that $r+2s$ is constant. The terms may be divided in six classes, which after multiplication by $y^2 - x$, and reduction modulo p, assume the following form:

$$r+2s = 2e_1 < p \qquad x \sum_{e_1=2}^{\mu} (2e_1)^{p-2} y^{2e_1} - y^2 \sum_{e_1=2}^{\mu} (2e_1)^{p-2} x^{e_1},$$

$$r+2s = 2e_2+1 < p \qquad x \sum_{e_2=1}^{\mu-1} (2e_2+1)^{p-2} y^{2e_2+1} - y \sum_{e_2=1}^{\mu-1} (2e_2+1)^{p-2} x^{e_2+1},$$

$$r+2s = p+2e_1 < 2p \qquad y^p \sum_{e_1=1}^{\mu} (2e_1)^{p-2} x^{e_1+1} - y \sum_{e_1=1}^{\mu} (2e_1)^{p-2} x^{e_1+1+\mu},$$

$$r+2s = p+2e_2+1 < 2p \qquad y^{p+1} \sum_{e_2=0}^{\mu-1} (2e_2+1)^{p-2} x^{e_2+1} - y^2 \sum_{e_2=0}^{\mu-1} (2e_2+1)^{p-2} x^{e_2+1+\mu},$$

$$r+2s = 2p+2e_1 \qquad y^{p+1} \sum_{e_1=1}^{\mu-1} (2e_1)^{p-2} x^{e_1+1+\mu} - x^p \sum_{e_1=1}^{\mu-1} (2e_1)^{p-2} y^{2e_1+2},$$

$$r+2s = 2p+2e_2+1 \qquad y^p \sum_{e_2=0}^{\mu-2} (2e_2+1)^{p-2} x^{\mu+e_2+2} - x^p \sum_{e_2=0}^{\mu-2} (2e_2+1)^{p-2} y^{2e_2+3}.$$

In the first class, we may introduce the terms (where $e_1 = 1$) $x(2e_1)^{p-2} y^{2e_1}$ and $-y^2(2e_1)^{p-2} x^{e_1}$ which nullify each other. Proceeding in an analogous way with the others, the sum of all the classes may be written:

$$F(x,y) \equiv x f_{p-1}(y) - x^p y^2 f_{p-1}(y) + 2^{p-2} K(x)(y^p x + y^{p+1} x^{\mu+1} - y^2 - y x^{\mu+1}) + M(x)(y^{p+1} + y^p x^{\mu+1} - y^2 x^\mu - y) \pmod p.$$

Hence

$$(12.) \qquad (y^2 - x) \sum_{n=1}^{p-1} 2^{p-n-1}\binom{p-2}{n-1} f_n(y) f_{p-n}(x) \equiv F(x,y) \pmod p.$$

Consider

$$(13.) \qquad S = \sum_{n=1}^{p-1} 2^{p-n-1}\binom{p-2}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{f_n(\alpha^i)}{1-\alpha^{ip}}\right) f_{p-n}(t). \qquad (m = 3, 5, \ldots p-2)$$

This may be written

$$S = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{n=1}^{p-1} 2^{p-n-1}\binom{p-2}{n-1} \frac{f_n(\alpha^i) f_{p-n}(t)}{1-\alpha^{ip}}$$

and by (12.), (since $1-\alpha^{ip}$ is prime to p)

$$(14.) \qquad SL \equiv L \sum_{i=1}^{m-1} \frac{F(t, \alpha^i)}{(1-\alpha^{ip})(\alpha^{2i}-t)} \pmod p,$$

where

$$L = \prod_{i=1}^{m-1} (\alpha^{2i} - t).$$

From (4.), (5.) and (9.) we also have $S \equiv 0 \pmod p$ since $t \neq 1$, and by virtue of (8.) and (8ª.) all the terms in $F(t, \alpha^i)$ involving $K(t)$ or $M(t)$ are divisible by p, hence (14.) and $S \equiv 0 \pmod p$ give

$$(15.) \qquad L \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(1-\alpha^{2i}) f_{p-1}(\alpha^i)}{(1-\alpha^{ip})(\alpha^{2i}-t)} \equiv 0 \pmod p. \qquad (m=3, 5, \ldots p-2)$$

For $m=5$ this gives

$$(16.) \qquad \prod_{i=1}^{4} (\alpha^{2i} - t) \sum_{i=1}^{4} \frac{(1-\alpha^{2i}) f_{p-1}(\alpha^i)}{(1-\alpha^{ip})(\alpha^{2i}-t)} \equiv 0 \pmod p.$$

Mirimanoff (this journ., vol. 139) finds that the set (3.) must also satisfy

$$(17.) \qquad \prod_{i=1}^{4} (\alpha^{i} - t) \sum_{i=1}^{4} \frac{f(\alpha^i)}{(1-\alpha^i)^{p-1}(\alpha^i-t)} \equiv 0 \pmod p.$$

Both of the last two congruences are of degree 3 in t, hence each of the values $t=-1$, 2 and $\frac{1}{2}$, satisfy (16.) and (17.), unless the integers u_1 and u_2 where u_1 and u_2 are the roots of $u^2 - u + 1 \equiv 0 \pmod p$, each satisfy them. The value $t=2$ in (16.) gives:

$$(18.) \qquad \begin{cases} p \equiv 1 \pmod 5 & 5C_5 + 3C_4 \equiv 0 \pmod p \\ \equiv 2 \quad ,, & 5C_5 - 2C_4 \equiv 0 \quad ,, \\ \equiv 3 \quad ,, & 5C_3 - 2C_2 \equiv 0 \quad ,, \\ \equiv 4 \quad ,, & 5C_4 + 3C_3 \equiv 0 \quad ,, \end{cases}$$

where

$$C_k = \sum_i \frac{1}{5i+k} \qquad (k \leqq 5)$$

and i ranges so that $5i+k$ represents all the integers of this form which are less than p, and $p > 5$. The relation (17.) gives for $t=2$

$$(19.) \qquad \begin{cases} p \equiv 1 \pmod 5 & 5C_5 + 2C_4 \equiv 0 \pmod p \\ \equiv 2 \quad ,, & 5C_5 - 3C_4 \equiv 0 \quad ,, \\ \equiv 3 \quad ,, & 5C_3 - 3C_2 \equiv 0 \quad ,, \\ \equiv 4 \quad ,, & 5C_4 + 2C_3 \equiv 0 \quad ,, \ . \end{cases}$$

Comparing these relations with (18.) we find in every case

$$C_1 \equiv C_2 \equiv C_3 \equiv C_4 \equiv C_5 \equiv 0 \pmod p,$$

and since

$$q(5) \equiv \sum_{n=1}^{4} y_n C_n \pmod{p}, \qquad y_n \equiv -\frac{n}{p} \pmod 5, \qquad 0 < y_n < 5,$$

we have the criteria (2.). For $T = u_1$ and u_2 the relation (16.) gives

$$(20.) \quad \begin{cases} p \equiv 1 \pmod 5 & C_1 \equiv 0 \pmod p \\ \equiv 2 \quad ,, & C_4 - C_5 \equiv 0 \quad ,, \\ \equiv 3 \quad ,, & C_1 - C_5 \equiv 0 \quad ,, \\ \equiv 4 \quad ,, & C_5 \equiv 0 \quad ,, \end{cases}.$$

The same substitutions in (17.) give

$$(21.) \quad \begin{cases} p \equiv 1 \pmod 5 & C_1 + C_2 \equiv 0 \pmod p \\ \equiv 2 \quad ,, & C_5 \equiv 0 \quad ,, \\ \equiv 3 \quad ,, & C_5 \equiv 0 \quad ,, \\ \equiv 4 \quad ,, & C_5 + C_1 \equiv 0 \quad ,, \end{cases}.$$

Comparing (20.) and (21.) we obtain the criteria (2.). Hence the proof of (2.) as criteria for the solution of (1.) in integers prime to p is then complete.

Berichtigung zu dem Aufsatze „Zur Einordnung der Kettenbruchtheorie in die Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen“ (Seite 212—238).

Von Herren *Ernst Hellinger* und *Otto Toeplitz.*

Auf S. 214, 221, 227 sind — worauf uns Herr *O. Perron* aufmerksam macht — versehentlich obere und untere Grenze der Koeffizienten a_p, b_p von $J(x)$ einerseits und ihres Spektrums andererseits gleich bezeichnet; in der Tat zeigt bereits das bekannte einfachste Beispiel der Form $\sum_{(p)} x_p x_{p+1}$, deren Spektrum von -1 bis $+1$ reicht, während $a_p = 0$, $b_p = -\frac{1}{2}$ ist (vgl. z. B. *Hilbert*, Integralgl. IV, (90.), Buchausg. S. 155 und *Toeplitz*, Gött. Nachr. 1910, S. 498 f), daß jene Größenpaare nicht übereinstimmen. Demgemäß sind

S. 214, Zeile 10, S. 221, Zeile 10, und S. 227, Zeile 8, die Buchstaben m, M und S. 214 die Ungleichungen in Zeile 11 zu streichen;

S. 221, Zeile 14 die Worte „*des Intervalles*“ durch „*eines endlichen Intervalles*“ zu ersetzen.

Alles übrige bleibt unberührt.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 144.

Heft 4.

Ausgegeben den 13. Juni

Berlin W. 10

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1914.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Jeder Band 16 Mark.

Band 144. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

Vogt, W., Über monotongekrümmte Kurven . . . . . Seite 239

Bohr, H., und **Courant, R.,** Neue Anwendungen der Theorie der *Diophant*-ischen Approximationen auf die *Riemann*sche Zetafunktion . . . — 249

Haentzschel, E., Bedingungen für die Lösung des *Fermat*schen Problems $y^2 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$ . . . . . — 275

Bohl, P., Über Differentialungleichungen . . . . . — 284

Vandiver, H. S., Extension of the criteria of *Wieferich* and *Mirimanoff* in connection with *Fermat*'s last theorem . . . . . — 314

Hellinger, E. und **Toeplitz, O.,** Berichtigung . . . . . — 318

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

MATHEMATISCHE WERKE

AUS DEM VERLAGE VON GEORG REIMER BERLIN W. 10

Baer, O., Éléments d'algèbre à l'usage des classes moyennes du collège royal français. 8. 1885 . . . . . geb. 2.50
— — Éléments de géométrie plane à l'usage des élèves du collège royal français. 8. 1887 . . . . . geb. 3.—

Ball, Rob. S., Theoretische Mechanik starrer Systeme. Auf Grund der Methoden und Arbeiten Ball's herausgegeben von H. Gravelius. Mit 2 Abbildungen. 8. 1889 . . . . . 14.—

Borchardt, C. W., Gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von G. Hettner. Mit Borchardts Bildnis. 4. 1888 . . . . . 17.—

Brunn, Hermann, Beziehungen des du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes zur Ovaltheorie. Eine mathematische Studie. 1905 . . . . . 7.—

Budde, E., Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme. Ein Lehrbuch für Hochschulen. I. Band: Mechanik der Punkte und Punktsysteme. 8. 1890 . . . . . 7.—
— — II. Band: Mechanische Summen und starre Gebilde. 8. 1891 . . . . . 8.—

Burrau, Dr., Carl, Tafeln der Funktionen Cosinus und Sinus. Mit den natürlichen sowohl reellen als rein imaginären Zahlen als Argument (Kreis- und Hyperbelfunktionen). 1907 . . . . . geb. 4.—

Crelle, A. L., Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen; mit Tafeln der Quadrat und Kubikzahlen von 1 bis 1000. Besorgt von O. Seeliger. . . . . 15.—

Dirichlet, G. Lejeune, Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften. 4.
I. Band. Herausgegeben von L. Kronecker. Mit Dirichlets Bildnis. 1889 . . . . . 21.—
II. Band. Herausgegeben von L. Kronecker, fortgesetzt von L. Fuchs. 1897 . . . . . 18.—

Eisenstein, G., Mathematische Abhandlungen, besonders aus dem Gebiete der höheren Arithmetik und der elliptischen Funktionen. Mit einer Vorrede von Gauß. 4. 1847. (vergriffen)
— — Tabelle der reduzierten positiven ternären quadratischen Formen nebst den Resultaten neuer Forschungen über diese Formen in besonderer Rücksicht auf ihre tabellarische Rechnung. 4. 1851 . . . . . 1.—

Emmerich, Dr. A., Die Brocardschen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks. Mit 50 Figuren im Text und einer lithogr. Tafel. 8. 1891 . . . . . 5.—

Gravelius, H., Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für die Dezimalteilung der Quadranten, mit ausführlichen Tafeln zum Übergang von der neuen Teilung des Quadranten in die alte und umgekehrt. Nebst vierstelligen Tafeln der Zahlenwerte der trigonometrischen Funktionen, sowie gewöhnlichen Logarithmentafeln und Quadrattafeln. Mit einem Vorworte von Professor Dr. W. Foerster, Direktor der Königl. Sternwarte zu Berlin. 8. 1885 . . . . . geb. 6.—

Haentzschel, E., Studien über die Reduktion der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Ein Anhang zu Heines Handbuch der Kugelfunktionen. 8. 1893 . . . . . 6.—

Heine, E., Handbuch der Kugelfunktionen. Theorie und Anwendungen. I. Band: Theorie (vergriffen). 1878. — II. Band: Anwendungen. 1881 . . . . . 6.—

Jacobi, C. G. J., Gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften. 4.
I. Band. Herausgegeben von C. W. Borchardt. Mit dem Bildnis Jacobis. 1881 . . . . . 18.—
II.—VII. Band. Herausgegeben von K. Weierstraß. 1882—1891 . . . . . 99.—
Supplementband. Vorlesungen über Dynamik. Herausgegeben von E. Lottner. 1884 . . . . . 10.—

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Carl Ohrtmann. Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung von Felix Müller, Albert Wangerin, Erich Salkowski, sowie der Berliner Mathematischen Gesellschaft, herausgegeben von Emil Lampe.

Bis jetzt erschienen 42 Bände zu verschiedenen Preisen.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. I. Band. 1890—91. 8. 1892 . . . . . 7.60
— — — — II. Band. 1891—92. 8. 1893 . . . . . 4.50
— — — — III. Band. 1892—93. 8. 1894 . . . . . 16.—
— — — — IV. Band. 1894—95. 8. 1897 . . . . . 16.—

Joachimsthal, F., Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Dritte Auflage, verbessert und durch einen Anhang von Aufgaben und deren Lösungen vermehrt von O. Hermes. Mit 8 Figurentafeln. 8. 1883 . . 3.60

Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von A. L. Crelle. 1826. Herausgegeben von K. Hensel. Jährlich erscheinen etwa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band . . . . 16.—

Bis jetzt erschienen 144 Bände.

Kronecker, L., Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Festschrift zu E. E. Kummers 50jährigem Doktor-Jubiläum am 10. September 1881. 8. 1882 . . . . . 6.—

Peters, J., Neue Rechentafeln für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen. 1909 . geb. 15.—
— — Fünfstellige Logarithmen der trigonometr. Funktionen für jede Zeitsekunde des Quadranten. 1912. geb. 7.—

Schellbach, K. H., Neue Elemente der Mechanik, dargestellt und bearbeitet von G. Arendt. Mit 12 Figurentafeln. 8. 1860 . . . . . 5.50
— — Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Funktionen. 8. 1864 . . . . . 6.—
— — Über die Zukunft der Mathematik an unseren Gymnasien. 8. 1887 . . . . . —.80

Schulte-Tigges, A., Philosophische Propädeutik auf naturwissenschaftlicher Grundlage für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht. 2. Auflage. 1904 . . . . . 3.—

Steiner, J., Gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften. Herausgegeben von K. Weierstraß. 8.
I. Band: Mit 44 Tafeln und Steiners Bildnis. 1881 . . . . . 16.—
II. Band: Mit 23 Tafeln. 1882 . . . . . 18.—

Wiecke, P., Lehrproben. Geometrische und algebraische Betrachtungen über Maxima und Minima. Zum Gebrauch in den oberen Klassen höherer Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht als Vorbereitung für den Besuch deutscher Hochschulen. Mit Figuren im Text und 7 Tafeln. 8. 1894 . . . . . kart. 5.—

Wolff, F., Lehrbuch der Geometrie. 8.
1. Teil. Ebene Elementargeometrie, Trigonometrie, Teilungslehre. 8. verbesserte Auflage. Mit 7 Kupfertafeln. 1870 . . . . . 5.—
2. Teil. Stereometrie und sphärische Trigonometrie. Mit 2 lithogr. Tafeln. 5. verbesserte Auflage 1872. . . . 3.—

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung G. m. b. H. Berlin W 10 und Leipzig

ZAHLENTHEORIE

Von

DR. KURT HENSEL

O. Ö. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER
UNIVERSITÄT MARBURG

Geheftet M. 10 ..... In Leinwand gebunden M. 10.80

Der Leser findet in diesem Buche nicht eine der gewöhnlichen Darstellungen der sogen. elementaren Zahlentheorie, sondern eine ganz neuartige, an deren Grundlagen der Verfasser jetzt seit etwa 20 Jahren arbeitet. Von dem Gedanken ausgehend, daß es sich in der Zahlentheorie doch wesentlich um die Beziehungen der rationalen Zahlen zu einer festen Grundzahl g handelt, hat der Verfasser den Begriff der g-adischen Zahlen eingeführt, deren Bereich den Bereich der rationalen Zahlen in ähnlicher Weise umfaßt, wie der Bereich der reellen Zahlen demjenigen der rationalen Zahlen übergeordnet ist. Jede nicht rationale g-adische Zahl kann nämlich (ähnlich wie jede irrationale Zahl) durch rationale Zahlen mit jeder beliebigen Annäherung dargestellt werden. Die Art der Einführung der g-adischen Zahlen stellt zugleich eine größere Analogie zwischen den Methoden der Arithmetik und der Funktionentheorie her. Es zeigt sich, daß die g-adischen Zahlen, wenn g eine Primzahl ist, einen „Zahlkörper" bilden, d. h. einen Bereich, in dem die vier elementaren Rechnungsarten unbeschränkt gültig sind und immer wieder in eindeutiger Weise zu Zahlen des Körpers führen. Ist aber g ein Produkt der Primfaktoren p, qu, ... r, so bildet der Bereich der g-adischen Zahlen nur einen „Ring", d. h. einen Bereich, in dem bloß Addition, Subtraktion und Multiplikation in der vorhin angedeuteten Weise anwendbar sind. Es ist die Aufgabe dieses Buches, diese Zahlenringe und Körper für das Gebiet der elementaren Zahlentheorie zu studieren. Die höhere Theorie der algebraischen Zahlen behandelt der Verfasser auf derselben Grundlage in einem eigenen Werke, dessen erster Band i. J. 1908 erschienen ist.

Wir können nicht weiter darauf eingehen, wie nun der Verfasser die g-adischen Zahlen (für g als Primzahl), die zunächst reine Rechensymbole waren, auch unter den Größenbegriff bringt, so daß er imstande ist, auf sie die Grundgesetze der Algebra und Analysis anzuwenden. Alle jene einfachen und bekannten Sätze der elementaren Zahlentheorie erscheinen jetzt in einem neuen Lichte, und wir rechnen es dem Verfasser besonders hoch an, daß er diese schöne Theorie hier an der Hand von vielen Beispielen, ohne irgendwelche Vorkenntnisse vorauszusetzen, so dargestellt hat, daß sie auch Studierenden zugänglich ist. Es ist zu vermuten, daß das vorliegende Buch bei allen Freunden der „Königin der Mathematik" (und darüber hinaus) großes Interesse hervorrufen wird.

(Die Geisteswissenschaften, 1914 No. 31.)